Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2014

Maria Filomena Ribeiro Conde Figueiredo

Recursos Digitais de apoio ao ensino de Probabilidades (MACS)

Digital Resources to support the teaching of Probability (Social Sciences)

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2014

Maria Filomena Ribeiro Conde Figueiredo

Recursos Digitais de apoio ao ensino de Probabilidades (MACS)

Digital Resources to support the teaching of Probability (Social Sciences)

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, realizada sob a orientação científica do Doutor Pedro Cruz, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, e da Doutora Andreia Hall, Professora Associada do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri / the jury

presidente / president	Professor Doutor Pedro Filipe Pessoa Macedo Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro
vogais / examiners committee	Professora Doutora Irene Vitória Ribeiro de Brito Professora Auxiliar da Universidade do Minho
	Professor Doutor João Pedro Antunes Ferreira da Cruz Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

Dedico este trabalho à minha família, em especial aos meus pais, Joaquim Manuel e Olga, às minhas filhas, Rita e Inês, e ao meu marido, Paulo, pelo apoio incondicional que sempre me deram em todas as minhas escolhas.

agradecimentos / **acknowledgements**

A elaboração desta dissertação de mestrado só foi possível com a colaboração e com o incentivo de várias pessoas, e às quais gostaria de manifestar o meu agradecimento:

À Professora Doutora Andreia Hall e ao Professor Doutor Pedro Cruz pela grande disponibilidade demonstrada desde sempre na orientação do mestrado, partilhando comigo os seus conhecimentos científicos, dando sugestões e fazendo correções, sempre no sentido de melhorar o meu trabalho;

À Ester de Lemos, pelo trabalho colaborativo que comigo desenvolveu, pela partilha de conhecimento, pela disponibilidade e pela amizade que criamos;

Aos meus pais e às minhas irmãs que sempre compreenderam as minhas ausências, ainda que apenas físicas, em momentos nem sempre fáceis;

Ao meu marido e às minhas filhas pelo estímulo, compreensão, paciência e pela companhia que me fizeram, nem sempre acordados, nas longas noites de trabalho;

Aos meus colegas do Agrupamento de Escolas Dr. Manuel Gomes de Almeida, em Espinho, em particular aos colegas da Direção, do grupo de Matemática e do Gabinete de Avaliação Interna que, das mais variadas formas, me ajudaram a ter um pouco mais de tempo disponível para a escrita da dissertação;

À Carlota e à Elda pela ajuda e disponibilidade.

A todos o meu sincero **Obrigado**

Palavras Chave

probabilidade, ensino, ciências sociais, recursos digitais, SIACUA, MEGUA, SageMath

Resumo

Numa época em que é constante o apelo às novas tecnologias importa refletir sobre o lugar que estas devem ocupar na Escola e no processo ensino/aprendizagem.

Esta dissertação surge então como uma tentativa de aliar, ao processo ensino/aprendizagem, as tecnologias colocadas à nossa disposição, nomeadamente para o ensino dos conteúdos do tema Probabilidades, lecionados na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS). Sendo esta uma disciplina destinada a alunos que *"não foram suficientemente conquistados para a Matemática"* é ainda mais premente a diversificação de estratégias e a utilização de recursos digitais educativos como forma de os cativar para a disciplina, suscitando neles um maior interesse nos temas abordados. Só despertando no aluno o gosto por aprender conseguiremos que ele se envolva profundamente na aprendizagem.

Neste sentido, um dos papeis do professor é disponibilizar aos seus alunos recursos, criteriosamente selecionados, capazes de promover a autonomia dos alunos no acesso ao saber. Cabe-lhe, não apenas a apresentação de recursos já disponíveis, mas também a criação de novos, adaptados às especificidades dos seus alunos, apesar de esta ser uma tarefa nem sempre fácil de concretizar nomeadamente pela falta de formação tecnológica.

No primeiro capítulo da dissertação é feita uma breve análise à importância do uso das tecnologias e à sua contribuição em contexto educativo, quer como base de um trabalho diferenciado e inovador, quer como suporte ao estudo autónomo realizado dentro ou fora da sala de aula.

No segundo e terceiro capítulos, é feito um enquadramento teórico e científico dos conteúdos lecionados em Probabilidades e que serviram de suporte à seleção dos temas a explorar na criação dos recursos.

Por fim, no quarto capítulo, são apresentados os recursos digitais educativos criados. Estes recursos consistem num conjunto de exercícios de escolha múltipla, sendo os enunciados parametrizados por valores ou funções, e todos eles com uma proposta de resolução pormenorizada. Foram escritos na linguagem tipográfica LaTeX e HTML básicos, com a programação de valores em linguagem de programação Python usada no sistema de computação algébrica e numérica Sage Mathematics e ainda com recurso à biblioteca MEGUA preparada para esse sistema (projeto em desenvolvimento na Universidade de Aveiro).

A disponibilização deste conjunto de exercícios na plataforma aberta SIACUA, de acesso livre, permite, para além de aumentar o leque de exercícios já aí publicados, colocar à disposição dos nossos alunos um novo recurso digital específico para a disciplina de MACS.

Keywords probability, education, social sciences, digital resources, SIACUA, MEGUA, SageMath

Abstract

In the era of the New Technologies, it is essential to reflect upon their role both at school and in the teaching-learning process.
This dissertation addresses the use of the New Technologies in the teaching-learning process, namely in the teaching of the contents of the topic Probability in the school subject “Mathematics Applied to Social Sciences” (MASC). A diversification of strategies together with the use of educational digital resources is crucial to appeal to students who have not successfully been motivated to the study of Mathematics. Only through the stimulation of the zest and interest in learning will students be actively involved in the learning process.
Therefore, one of the teacher’s roles is to provide his/her students meticulously selected resources, aimed at promoting the student’s autonomy in accessing knowledge. The teacher is thus expected not only to provide the students available educational resources, but also to create resources that meet the students’ educational needs, a task often made more difficult by the lack of technological training.
The first chapter of this dissertation will provide a bief analysis of the importance of the use of technology and its contribution in educational context, as the basis not only of innovative and differentiated teaching methods, but also of autonomous learning in and out of the classroom.
The second and third chapters will present a theoretical and scientific framework of the contents taught in Probability, from which the topics explored in the creation of the resources were selected.
The fourth chapter will present the educational digital resources which have been created. These consist of a set of multiple choice exercises, in which the questions are parameterized by values or functions and a detailed resolution is provided. They were written in LaTeX, HTML, and Python as this programing language is used in the Sage Mathematics numeric and algebric computational system. The library MEGUA (under development at the University of Aveiro) has also been used.
This set of exercises available on the free access SIACUA platform not only broadens the spectrum of exercises, but also provides a new digital resource specifically designed for the subject “Mathematics Applied to Social Sciences”(MASC).

Acrónimos e abreviaturas

c.d. casas decimais;

HTML Hyper Text Markup Language;

MACS Matemática Aplicada às Ciências Sociais;

MEGUA Mathematics Exercise Generator, University of Aveiro;

MSC Mathematical Subject Classification;

NCTM National Council of Teachers of Mathematics;

SAGE System for Algebra and Geometry Experimentation;

SIACUA Sistema Interativo de Aprendizagem por Computador da Universidade de Aveiro;

TIC Tecnologias de Informação e Comunicação;

v.a. variável aleatória.

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

"A principal meta da educação é criar homens que sejam capazes de fazer coisas novas, não simplesmente repetir o que outras gerações já fizeram. Homens que sejam criadores, inventores, descobridores. A segunda meta da educação é formar mentes que estejam em condições de criticar, verificar e não aceitar tudo que a elas se propõe." (Jean Piaget)

O primeiro objetivo da elaboração desta dissertação é permitir a realização de uma análise crítica relativamente à importância da utilização das novas tecnologias no processo ensino/aprendizagem e em particular no ensino da Matemática. Apesar de constituírem poderosas ferramentas educativas "o uso que se faz destas na Educação ainda é, por vezes, muito tradicional e conservadora e em demasiada consonância com os currículos, manuais e programas escolares" (Castro, E. et al , 2005).

No entanto, tendo em atenção que a escola está inserida numa sociedade de bases tecnológicas, num contexto de cibercultura, e que os nossos alunos nasceram no meio desta torrente de tecnologias, "não é mais possível ignorar as alterações que as Tecnologias da Informação e da Comunicação (TIC) provocam na forma como as pessoas veem e apreendem o mundo, bem como desprezar o potencial pedagógico que tais tecnologias apresentam quando incorporados à educação" (Kampff et al., 2004). É claro, para quem está diariamente presente na escola, que "como resultado deste ambiente omnipresente e o grande volume de interação com a tecnologia, os alunos de hoje pensam e processam as informações bem diferentes das gerações anteriores" (Prensky, 2001).

Ainda que as opiniões expressas pelos autores aqui referenciados relatem realidades existentes há alguns anos atrás, a situação atual, no que se refere a *software* aberto para auto-estudo, não mudou muito embora a existência de computadores e de quadros interativos nas escolas seja já uma realidade.

A mera presença de material informático não implica automaticamente uma renovação do binómio ensino/aprendizagem. Assim, continua a ser urgente repensar as metodologias de ensino/aprendizagem e diversificar os recursos e as estratégias utilizadas em contexto de sala de aula. As grandes evoluções tecnológicas são uma realidade e os professores têm de estar atentos e preparados, uma vez que os alunos não estão alheios a essa realidade e são cada vez mais exigentes.

A presente dissertação parte então deste pressuposto: A utilização, no ensino, e em particular, no ensino da Matemática, das novas tecnologias deve ser uma prática corrente, estando presentes no desenvolvimento de processos formativos e pedagógicos e na criação de recursos educativos inovadores e construtivos como instrumentos de trabalho.

Sendo assim, o principal objetivo da elaboração desta dissertação é a criação de recursos digitais de apoio ao ensino de Probabilidade para a disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS), tentando abranger um leque variado de conteúdos.

Para esse efeito foram desenvolvidos diversos exercícios parametrizados de escolha múltipla integrados no projeto MEGUA (Mathematics Exercise Generator, University of Aveiro) e disponibilizados na plataforma SIACUA (Sistema Interativo de Aprendizagens por Computador, Universidade de Aveiro). Esta plataforma é um sistema de aprendizagem aberto, em constante atualização e desenvolvimento, e que possui uma área de estudo autónomo capaz de fomentar o conhecimento e capacidades dos alunos.

Acreditamos que o presente trabalho constitui um bom exemplo de utilização de tecnologia no ensino da matemática e apresenta ferramentas inovadoras nesse propósito, que poderão servir de guia ao trabalho docente.

1.1 Procedimentos Metodológicos

A meta principal deste mestrado é, como o próprio nome indica, a criação de **"Recursos Digitais de apoio ao ensino de Probabilidades (MACS)"**.

Para a conclusão com sucesso deste objetivo houve necessidade de superar etapas que, apesar de nem sempre fáceis de ultrapassar, foram ampliando os nossos conhecimentos e colocando ao nosso dispor novas ferramentas de trabalho.

Inicialmente, foram realizadas diversas leituras especializadas sobre os temas a abordar, consultada variada informação disponibilizada na Internet, partilharam-se experiências com colegas de profissão, enfim, procedeu-se a uma revisão bibliográfica e a uma atualização sobre os conteúdos que seriam aqui abordados. Esta tarefa inicial permitiu obter conhecimentos fundamentais, quer no âmbito das tecnologias de informação e comunicação e dos recursos digitais, quer no âmbito das probabilidades.

O passo seguinte foi a seleção de diversos tipos de exercícios, versando grande parte dos conteúdos do tema *Modelos de Probabilidade* e adequados à disciplina (MACS) e aos alunos a que se destinavam. Decidiu-se elaborar exercícios sobre os seguintes conteúdos:

- Fenómenos Aleatórios;
- Argumentos de simetria e Regra de Laplace;
- Modelos de probabilidade em espaços finitos. Variáveis quantitativas. Função massa de probabilidade.
- Probabilidade condicionada. Árvores de probabilidade. Acontecimentos independentes;
- Probabilidade Total. Regra de Bayes;
- Valor médio e variância populacional;
- Espaços de resultados infinitos. Modelos discretos.

Escolhidos conteúdos e tipos de exercícios, deu-se início à árdua tarefa de os construir, usando linguagem tipográfica LaTeX e linguagem de programação Python. Foi de todas, a tarefa mais difícil mas também a mais desafiante.

A lógica da linguagem e a autonomia na construção dos códigos fonte de cada exercício foi algo que demorou algum tempo a conquistar. No entanto a conclusão de um exercício levou sempre à vontade de iniciar um outro.

Houve uma tentativa de inovar, tanto na parametrização das variáveis, como na apresentação dos exercícios ou na sua resolução. Foram construidas tabelas de tamanho fixo e dinâmicas, diagramas de árvore, diagramas de Venn, sistemas de equações, tabelas de distribuição de probabilidade, $\cdots$, tentando variar e tornar apelativa a apresentação gráfica da resolução de cada exercício.

Para o sucesso desta etapa muito contribuiu a preciosa ajuda do Professor Pedro Cruz que foi incansável no esclarecimento das inúmeras dúvidas que foram surgindo, dando sempre resposta a qualquer desafio a nível informático apresentado.

Depois de construídos os exercícios, foram selecionadas as dez chaves a disponibilizar na plataforma SIACUA. Esta seleção foi realizada tendo em atenção que cada uma das chaves geraria um exercício diferente e que estes cobririam a maioria dos casos possíveis na resolução do mesmo.

Terminada esta tarefa deu-se início à escrita da dissertação propriamente dita. Mais uma vez surgia um grande desafio pela frente: a escrita no processador de texto LaTeX. Outra completa novidade e outro grande desafio.

1.2 Estrutura da dissertação

A estrutura da dissertação divide-se em cinco capítulos, que depois se subdividem em secções e subsecções.

No *Capítulo 1 - Introdução* - foram abordados os princípios orientadores e os suportes teóricos e pedagógicos que fundamentam a utilização dos recursos digitais no processo/ensino aprendizagem. Foi também realizada uma pequena reflexão sobre a disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS) e sobre o peso das Probabilidades no seu programa.

No *Capítulo 2 - Probabilidades* - foram apresentados os suportes científicos mais gerais que sustentam a criação dos exercícios, sempre tendo em atenção particular as indicações metodológicas apresentadas no programa de MACS.

No *Capítulo 3 - Variáveis Aleatórias e suas distribuições* - foi feita uma continuação do capítulo 2, mas agora apresentando suportes científicos mais específicos, abordando os temas Variáveis Aleatórias (discretas e contínuas), os seus modelos de distribuição e as distribuições usuais que representam Distribuições de Probabilidades (discretas e contínuas). Neste capítulo optamos for referir apenas alguns modelos apresentados na disciplina de MACS, não nos focando muito em demonstrações teóricas, nem na apresentação de resoluções de exercícios de forma analítica uma vez que os alunos de MACS recorrem com frequência à utilização da máquina de calcular gráfica, no cálculo de probabilidades envolvendo qualquer um dos modelos apresentados.

No *Capítulo 4 - Implementação do software* - foram apresentadas a plataforma digital *Sage Mathematics* e a biblioteca de *software open source* MEGUA. Foi também mostrada a forma de criação de um exercício, usando estes recursos bem como a descrição completa de todos os exercícios criados e disponibilizados na plataforma SIACUA no âmbito desta dissertação. Aqui aparece apenas um dos possíveis formatos de cada exercício de acordo com os parâmetros aleatoriamente selecionados. Para cada exercício foi feita uma apresentação do tema aí versado e das dificuldades encontradas na escolha das variáveis, nas restrições que deveriam ser feitas e nos desafios colocados a nível de construção matemática e informática. Foi também apresentada uma concretização de cada exercício e respetiva proposta de resolução.

No *Capítulo 5 - Conclusão* - foi realizada uma pequena reflexão sobre o trabalho desenvolvido ao longo desta dissertação e apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros.

Em Apêndice são apresentados os códigos fonte que serviram de base na construção dos exercícios.

1.3 A disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS)

1.3.1 Estrutura da disciplina

A disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS) entrou em vigor em 2001 e teve o seu programa homologado em 16 de maio desse ano. Fazia parte, na altura, dos currículos dos Cursos Geral de Ciências Sociais e Humanas e Tecnológico de Ordenamento do Território do ensino secundário.

A criação desta nova disciplina teve como finalidade "desempenhar um papel incontornável para os estudantes dos cursos, contribuindo para uma abordagem tão completa quanto possível de situações reais, ao desenvolver a capacidade de formular e resolver matematicamente problemas e ao desenvolver a capacidade de comunicação de ideias matemáticas" (Prog. de MACS, 2001, p.1)

Atualmente, de acordo com o Decreto-Lei n.º 74/2004, de 24 e Março, e com a oferta formativa do ensino secundário, é lecionada como disciplina de opção bienal, da componente da formação específica, no Curso Cientifico-Humanístico de Línguas e Humanidades e tem uma carga horária semanal distribuída por três aulas de noventa minutos. Apesar de ser uma disciplina lecionada num curso diferente daquele para o qual foi criada, o seu programa mantém-se inalterado desde então.

Os estudantes que optam pela frequência deste curso são habitualmente alunos que não foram "suficientemente conquistados para a Matemática" (Prog. de MACS, 2001, p.3) e, por isso, "mais do que pretender que os estudantes dominem questões técnicas e de pormenor, pretende-se que os estudantes tenham experiências matemáticas significativas que lhes permitam saber apreciar devidamente a importância das abordagens matemáticas nas suas futuras atividades. (...) O objetivo aqui vai ser o de introduzir e desenvolver alguns conceitos matemáticos através de problemas da vida real, mais numa perspetiva de formação cultural do que de formação estritamente técnica" (Prog. de MACS, 2001, p.1).

Todo o programa de MACS foi pensado com o propósito de introduzir e desenvolver alguns conceitos matemáticos através de problemas da vida real, mais numa perspetiva de formação cultural do que de formação estritamente técnica. Nesta disciplina, "se é verdade que os estudantes devem usar corretamente o vocabulário e simbologia específicos da Matemática, também se deve ter em conta que estes não são o centro da aprendizagem nem devem ser confundidos com rigores formais que a desvirtuem" (Prog. de MACS, 2001, p.9). No seguimento deste conceito os grandes temas abordados nesta disciplina são assuntos que ligam a Matemática à vida do dia-a-dia, a saber: *Métodos de Apoio à Decisão, Modelos Matemáticos e Estatística*, incluindo-se neste último os *Modelos de Probabilidades e a Inferência Estatística.*

O estudo da Teoria das Probabilidades é um instrumento que nos ajuda a estimar com o máximo de precisão possível o resultado de acontecimentos, dos quais não podemos dizer, antecipadamente, qual será o resultado. Ela aplica-se a quase todos os campos do conhecimento humano. Conhecendo o cálculo de probabilidades o aluno terá oportunidade de relacioná-lo com experiências do dia-a-dia, de dar significado à aprendizagem fazendo a ponte entre a teoria e a prática. Sendo assim, a introdução do estudo dos Modelos de Probabilidade no programa de MACS é amplamente justificado.

1.3.2 Peso das Probabilidade no Programa de MACS

No programa de MACS, o tema *Estatística (e Probabilidades)* assume um papel proeminente.

O peso dado a este tema é bastante significativo sendo recomendado, pelos autores do programa, dedicar a esta rubrica mais de metade das aulas totais previstas para a lecionação de todo o programa. Este peso reflete-se no exame nacional onde a sua valorização ronda os cinquenta por cento. Integrados neste grande tema estão os conteúdos Estatística, Modelos de Probabilidades e Inferência Estatística.

Dada a importância que lhe é atribuída, e sabendo, por experiência profissional na lecionação desta disciplina ao longo de vários anos, que este é um assunto no qual os alunos revelam bastantes dificuldades, a opção pela criação de recursos digitais nesta área pareceu-nos a mais óbvia.

1.3.3 Sugestões Metodológicas no Programa de MACS

"O uso de tecnologia facilita [ainda] uma participação ativa do estudante na sua aprendizagem como já era preconizado por Sebastião e Silva, quando escrevia no "Guia para a utilização do Compêndio de Matemática" que "haveria muitíssimo a lucrar em que o ensino fosse tanto quanto possível laboratorial, isto é, baseado no uso de computadores, existentes nas próprias escolas ou fora destas, em laboratórios de cálculo" (Prog. de MACS, 2001, p.10).

As tecnologias são ferramentas essenciais para o ensino e aprendizagem da Matemática, pois "proporcionam imagens visuais das ideias matemáticas" [além de que] "os alunos podem concentrar-se nas decisões a tomar, no raciocínio e na resolução de problemas" (NCTM, 2008, p.26).

O próprio programa da disciplina de MACS refere que a "didática prevista para a Matemática Aplicada às Ciências Sociais no ensino secundário pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados", (Prog. de MACS, 2001, p.9), dando como exemplo as calculadoras gráficas e os computadores.

Consideram, os próprios autores do programa, indispensável o uso de "computadores com *soft-*

ware adequado para trabalho tão regular quanto possível" (Prog. de MACS, 2001, p.9). Neste contexto a criação de recursos digitais educativos em áreas específicas da disciplina de MACS torna-se uma necessidade premente.

Os recursos já existentes, para a área de matemática, apesar de importantes e diversificados, nem sempre vão ao encontro das caraterísticas próprias dos alunos de MACS, pois são na maioria das vezes direcionados para alunos de Matemática, no ensino básico ou de Matemática A, nos cursos do ensino secundário de Ciências e Tecnologias.

Capítulo 2

Probabilidades

"A teoria das probabilidades, no fundo, não é mais do que bom senso traduzido em cálculo; permite calcular com exatidão aquilo que as pessoas inteligentes sentem por uma espécie de instinto... É notável como tal ciência, que começou com estudos sobre jogos de azar, tenha alcançado os mais altos níveis do conhecimento humano."

Laplace

2.1 Objetivo do estudo das Probabilidades em MACS

Nos mais variados aspetos da nossa vida a palavra **Probabilidade** é por nós utilizada:

"O céu está carregado de nuvens negras. É muito provável que chova ainda hoje"

"A probabilidade de ganhar o Euromilhões é muito pequena mas, mesmo assim, vou jogar"

"Li num artigo que assistir ao divórcio de amigos aumenta em setenta e cinco por cento a probabilidade de um casal se separar. Parece que o divórcio é contagioso"

"Estive a jogar dados com uns amigos. Lancei cinco vezes e saiu sempre o 4. Pensei que, se apostasse que saía 4 na jogada seguinte, a probabilidade de ganhar era quase certa, mas perdi! ..."

"A probabilidade de sair um número par, no lançamento de um dado, é igual à probabilidade de sair número ímpar pois, num dado, há tantos números pares como ímpares."

"Nunca jogo uma chave no Totoloto com cinco números consecutivos. A probabilidade de sair uma chave assim é quase zero!"

"Será que com este medicamento novo há maior probabilidade de cura do que com o medicamento habitual?"

Em todos estes exemplos há uma característica comum: a presença da incerteza no resultado, embora muitas das vezes os resultados possíveis sejam conhecidos. Os graus desta incerteza são diferentes de questão para questão mas, embora nem sempre conseguirmos quantificar e atribuir um valor numérico a esta incerteza, é comum exprimirmos o nosso grau de convicção, ou a credibilidade que damos, relativamente à realização de acontecimentos, revelando, assim, que todos nós temos uma noção, ainda que intuitiva, de **Probabilidade**.

A convicção com que atribuímos um valor à probabilidade de determinado acontecimento ocorrer é baseada, na maioria das vezes, na intuição que, como sabemos, nem sempre nos leva a raciocínios corretos: muitas pessoas estão convictas que a probabilidade, no lançamento de dois dados, de "obter um três e um quatro" é igual à de "obter dois quatros", ou que a probabilidade de "obter três faces nacionais" é menor se lançarem três moedas simultaneamente do que se fizerem três lançamentos consecutivos.

Assim, se o céu estiver carregado de nuvens diremos que é muito provável que chova, pois é habitual isso acontecer. Diremos ainda que será indiferente apostar num número de par ou num número ímpar, no lançamento de um dado comum, uma vez que sabemos que existem tantos números pares como ímpares.

Intuitivamente, diremos também que a probabilidade de ganhar o Euromilhões com apenas uma aposta é muito pequena e que, naturalmente, duplicando as apostas duplicaremos a oportunidade de ganhar.

No entanto, o estudo da *Teoria das Probabilidades* não se pode ficar pela intuição. "Tem como objetivo formular modelos de fenómenos naturais em que se supõe intervir o acaso, isto é, em que a partir do passado não se pode prever deterministicamente o futuro, mas para os quais se podem encontrar, em certas condições, taxas de realização constante, que poderão permitir previsões de índole geral" (Neves et al., 1998, p.39).

É, então, objetivo principal da *Teoria das Probabilidades* quantificar a incerteza presente em determinada situação, ora usando um número, ora usando uma função matemática.

2.2 Definições e Conceitos

Neste capítulo serão apresentadas definições e conceitos referentes à noção de Probabilidade.

Na procura das definições e dos conceitos apresentados ao longo deste capítulo foram utilizadas diversas fontes, sendo as principais Longo & Branco (2011), Martins (2005), Murteira et al. (2007), Neves et al. (1998), Oliveira (1990), Spiegel (1977) e Vairinhos (1996).

2.2.1 Definições

Em diversas situações da vida real, e em várias áreas científicas, estamos muitas vezes perante fenómenos dos quais desconhecemos o que se vai observar, não temos a certeza do que vai acontecer.

A este tipo de fenómenos damos o nome de **Fenómenos Aleatórios** em oposição aos fenómenos físicos com leis deterministas, para os quais já se conhece o resultado mesmo antes da sua realização. Estes últimos têm o nome de **Fenómenos Deterministas**.

Definição 2.2.1. ***Fenómenos aleatórios*** — *São fenómenos para os quais os resultados das realizações individuais são incertos, mas em que se admite ser possível encontrar um padrão genérico de comportamento, ou uma regularidade a longo termo, isto é, para um grande número de realizações do fenómeno.*

São exemplos de fenómenos aleatórios:

- Sorteio do Totoloto;
- Comportamento dos eleitores nas próximas eleições presidenciais;
- Tempo que fará na próxima semana.

São exemplos de fenómenos deterministas:

- a próxima semana terá sete dias;
- se um automóvel andar a uma velocidade média de 5 km/h, demorará 4 horas a percorrer 20 km;
- se o carro não tiver combustível, não anda.

Definição 2.2.2. ***Experiência aleatória*** — *À realização do fenómeno aleatório chamamos experiência aleatória.*

Diremos que uma **experiência aleatória** deve apresentar as seguintes características:

- O conjunto dos resultados possíveis é conhecido antecipadamente;
- Na realização da experiência intervém o acaso, pelo que o seu resultado nunca pode ser previsto de forma exata, mesmo que se desenvolvam todos os esforços para manter sob controlo as circunstâncias relevantes para o resultado (Murteira et al., 2007).

Ao realizar uma qualquer experiência aleatória, apesar de não conhecermos qual o resultado que iremos obter, temos o conhecimento de todos os resultados possíveis.

Por exemplo, ao lançar um dado, apesar de não sabermos que face ficará voltada para cima, sabemos, antecipadamente que os resultados possíveis são 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. A este conjunto damos o nome de **espaço de resultados**.

Definição 2.2.3. ***Espaço de resultados***—*Dada uma experiência aleatória, à lista completa dos possíveis resultados da experiência dá-se o nome de* ***espaço de resultados*** *ou espaço amostral e designa-se por Ω. Aos elementos de Ω dá-se o nome de resultados e esses resultados simbolizam-se por ω (Vairinhos, 1996).*

Exemplo 2.1. *Na experiência aleatória "Lançar uma moeda e verificar a face voltada para cima", o espaço de resultados é*

$$\Omega_1 = \{\textit{face nacional, face europeia}\}$$

Exemplo 2.2. *Na experiência aleatória "Contar o número de lançamentos de uma bola de basquetebol até encestar", o espaço de resultados é*

$$\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Exemplo 2.3. *Na experiência aleatória "Verificar o tempo de vida de uma lâmpada", o espaço de resultados é*

$$\Omega_3 = [0, \infty)$$

Exemplo 2.4. *Na experiência aleatória "Verificar o erro cometido quando medimos o espaço percorrido por um carro de F1 em 10 seg.", o espaço de resultados é*

$$\Omega_4 = (-\infty, \infty)$$

O espaço de resultados pode ser discreto finito (Ω_1), discreto infinito (Ω_2) ou contínuo (Ω_3 e Ω_4).

Definição 2.2.4. ***Acontecimento***—*Dada uma experiência aleatória cujo espaço de resultados é Ω, um acontecimento A é um conjunto de resultados e como tal um subconjunto de Ω.*

De um modo geral os acontecimentos identificam-se com letras maiúsculas A, B, $\dots$, e diz-se que se realizou o acontecimento A quando o resultado da experiência pertence a A.

Definição 2.2.5. ***Acontecimento certo*** — *Dizemos que um acontecimento é certo quando ocorre sempre, seja qual for o resultado da experiência aleatória (Vairinhos, 1996).*

O acontecimento certo simboliza-se por Ω.

- *A: no lançamento de um dado, sair um número inferior a 8*

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$$

Definição 2.2.6. ***Acontecimento impossível*** — *Dizemos que um acontecimento é impossível quando nunca pode ocorrer (Vairinhos, 1996).*

O acontecimento impossível simboliza-se por $\emptyset$.

- *B: no lançamento de um dado, sair um número ímpar maior que 5*

$$B = \{\} = \emptyset$$

Definição 2.2.7. ***Acontecimento elementar*** — *Se o resultado da experiência aleatória é sempre um só elemento do espaço de resultados dizemos que se trata de um acontecimento elementar.*

- *C: no lançamento de um dado, sair um número superior a 5*

$$C = \{6\}$$

Definição 2.2.8. ***Acontecimento composto*** — *Se o resultado da experiência aleatória contém mais do que um elemento do espaço de resultados dizemos que se trata de um acontecimento composto.*

- *D: no lançamento de um dado, sair um número ímpar*

$$D = \{1, 3, 5\}$$

Sendo possível, como vimos, associar um acontecimento A a um subconjunto do espaço de resultados Ω, é útil relembrar as operações entre conjuntos e aliar estas operações às operações entre acontecimentos.

"No entanto não devemos confundir conjuntos com acontecimentos. Devemos assim manter a distinção entre acontecimento como o conceito de algo que ocorre ou pode ocorrer no mundo e a sua representação matemática em termos de conjuntos" (Vairinhos, 1996).

2.2.2 Álgebra de acontecimentos

Sendo os acontecimentos subconjuntos do espaço de resultados, a construção da álgebra de acontecimentos é feita por analogia com a álgebra de conjuntos.

A utilização de diagramas de Venn[1], de forma a facilitar a visualização das operações entre acontecimentos, é um técnica bastante usada no ensino deste tema.

[1] O nome correto dos diagramas utilizados é *Diagramas de Euler* mas, abusivamente, generalizou-se a utilização do termo Diagrama de Venn. No entanto alguns autores fazem referência a estes diagramas como *diagramas de Venn-Euler*. Na página 36 desta dissertação serão explicitadas estas noções.

Definição 2.2.2.1. ***Implicação*** — *O acontecimento A implica a realização do acontecimento B quando todo o resultado de A é um resultado de B, ou seja quando A está contido em B.*

Em diagrama de Venn a representação é a figura apresentada em (2.1)

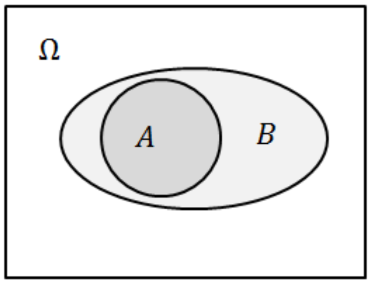


Figura 2.1: $A \subset B$

Exemplo:

- A: no lançamento de um dado, sair o número dois ou o número três.

  B: no lançamento de um dado, sair um número primo.

  $$A = \{2, 3\} \qquad B = \{2, 3, 5\}$$

  $$A \subset B$$

  Sendo os números 2 e 3, primos, a realização do acontecimento A implica a realização do acontecimento B.

Definição 2.2.2.2. ***União de Acontecimentos*** — *A união de dois acontecimentos A e B, $A \cup B$, é o acontecimento que se realiza quando pelo menos um deles se realiza.*

Usando o diagrama de Venn tem-se a representação da figura 2.2.

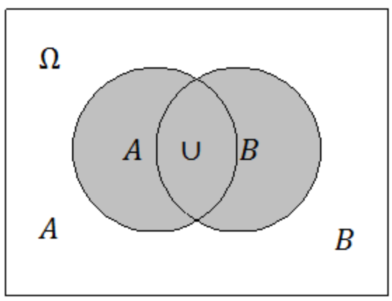


Figura 2.2: A união $A \cup B$

Exemplo:

- A: no lançamento de um dado, sair o número dois ou o número três

  B: no lançamento de um dado, sair um número par.

$$A = \{2,3\} \qquad\qquad B = \{2,4,6\}$$

$$A \cup B = \{2,3,4,6\}.$$

Definição 2.2.2.3. ***Interseção de Acontecimentos*** *— A interseção de dois acontecimentos A e B, $A \cap B$, é o acontecimento que se realiza quando ambos se realizam (Figura 2.3).*

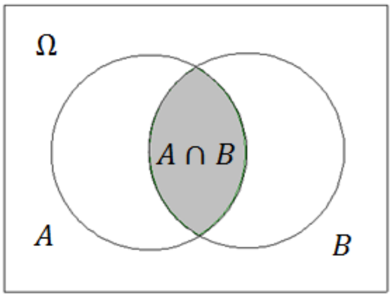


Figura 2.3: A interseção $A \cap B$

Exemplo:

- A: no lançamento de um dado, sair o número dois ou o número três

  B: no lançamento de um dado, sair um número par.

$$A = \{2,3\} \qquad\qquad B = \{2,4,6\}$$

$$A \cap B = \{2\}.$$

Definição 2.2.2.4. ***Acontecimentos mutuamente exclusivos (ou disjuntos ou incompatíveis)*** *— Diz-se que os acontecimentos A e B são mutuamente exclusivos (ou disjuntos ou incompatíveis) se a sua ocorrência simultânea é impossível, $A \cap B = \emptyset$ (Vairinhos, 1996).*

Usando o diagrama de Venn tem-se a representação da figura 2.4.

Exemplo:

- A: no lançamento de um dado, sair um número ímpar

  B: no lançamento de um dado sair o número 2.

$$A = \{1,3,5\} \qquad\qquad B = \{2\}$$

  Como $A \cap B = \emptyset$ dizemos que A e B são acontecimentos mutuamente exclusivos.

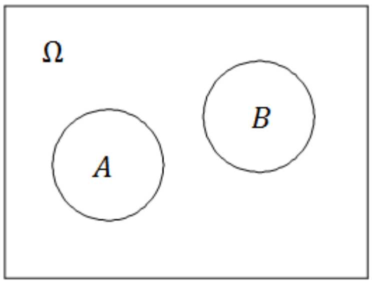


Figura 2.4: Acontecimentos A e B mutuamente exclusivos

Definição 2.2.2.5. ***Acontecimentos contrários*** — *Diz-se que os acontecimentos A e B são contrários se, e só se, forem incompatíveis e a sua reunião for o espaço de resultados ($A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \Omega$).*

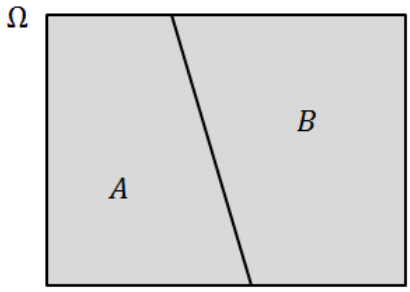


Figura 2.5: Acontecimentos A e B contrários

Exemplo:

- A: no lançamento de um dado, sair um número ímpar

  B: no lançamento de um dado, sair um número par.

  $$A = \{1, 3, 5\} \qquad\qquad B = \{2, 4, 6\}$$

  Como $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \Omega$ dizemos que A e B são acontecimentos contrários.

  Os acontecimentos contrários verificam a definição 2.2.2.4 logo podemos dizer estes são um caso particular dos acontecimentos mutuamente exclusivos.

Definição 2.2.2.6. ***Diferença de Acontecimentos*** — *A diferença entre os dois acontecimentos A e B, $A - B$, é o acontecimento que se realiza se, e só se, A se realiza sem que se realize B.(Figura 2.6).*

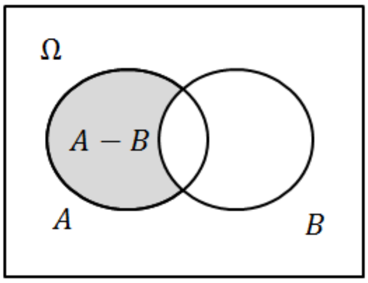


Figura 2.6: A diferença $A - B$

Exemplo:

- A: no lançamento de um dado, sair um número par.

  B: no lançamento de um dado, sair um número primo.

$$A = \{2, 4, 6\} \qquad B = \{2, 3, 5\}$$

$$A - B = \{4, 6\}.$$

Considerando o caso particular da diferença entre os conjuntos Ω e A, $\Omega - A$, dizemos que este acontecimento, que apenas se realiza se A não se realiza, se designa por **contrário** ou **complementar** de A e se representa por $\overline{A}$.

A representação em diagrama de Venn é a da figura 2.7.

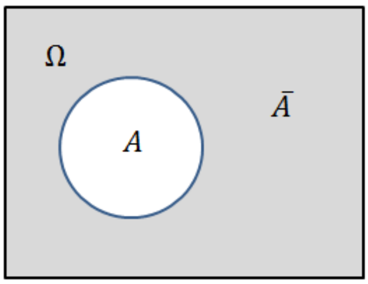


Figura 2.7: O complementar de A, $\overline{A}$

Evidentemente $A \cap \overline{A} = \emptyset$ e $A \cup \overline{A} = \Omega$. Assim podemos dizer também que A e $\overline{A}$ são mutuamente exclusivos.

Exemplo:

- A: no lançamento de um dado, sair um número cinco.

$$A = \{5\} \qquad \overline{A} = \Omega - \{5\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

2.3 Conceitos de Probabilidade

Embora o conceito de probabilidade esteja intimamente ligado à realização de uma experiência, não há uma interpretação científica única do termo probabilidade aceite por todos. Ao longo dos tempos diversas interpretações do termo probabilidade têm sido propostas e todas elas têm sido criticadas. Ainda assim, os procedimentos de cálculo de todas elas se aproximam de uma estrutura lógica comum.

Sabemos que apenas podemos falar em Probabilidade de um acontecimento se não soubermos antecipadamente o que acontece sempre que essa experiência de repete. No entanto é também necessário que a experiência se possa repetir um grande número de vezes.

De seguida iremos apresentar quatro conceitos diferentes de Probabilidade. De entre os diferentes conceitos existentes o clássico e o frequencista são os mais abordados no ensino de MACS, apesar de ser também feita uma ligeira abordagem ao conceito axiomático.

2.3.1 Conceito clássico, teórico ou *a priori*

"A probabilidade de sair um número par, no lançamento de um dado, é igual à probabilidade de sair número ímpar pois, num dado, há tantos números pares como ímpares."

O conceito clássico de probabilidade, explicitado por Laplace, surgiu do tratamento matemático de jogos de azar. Assim, este conceito é baseado em algumas propriedades desses jogos, como a possibilidade de listarmos antecipadamente todos os resultados possíveis num número finito de casos mutuamente exclusivos, obedecendo ao **princípio da simetria**, isto é, partindo do princípio que todos os acontecimentos elementares do espaço amostral são equiprováveis.

No lançamento de um dado, facilmente dizemos que a probabilidade de sair o número 2 é $\frac{1}{6}$ e que a probabilidade de sair um número par é $\frac{1}{2}$. Ao retirar uma bola de uma caixa onde sabemos existirem 3 bolas brancas, 2 bolas pretas e 5 bolas verdes, sem dúvidas diremos que a probabilidade de sair bola branca é $\frac{3}{10}$, de sair bola preta é $\frac{2}{10}$ e de sair verde é $\frac{5}{10}$. Não havendo razões para duvidar que cada um dos acontecimentos elementares tem igual probabilidade de ocorrer, definimos intuitivamente a probabilidade de um acontecimento como a razão entre o número de casos favoráveis à sua realização e o número total de casos possíveis.

A probabilidade assim calculada tem um carácter objetivo, sendo independente do observador. Todos os observadores a calculariam do mesmo modo. Para a determinação desta probabilidade não seria sequer necessário lançar o dado ou retirar a bola do saco. As probabilidades determinadas desta forma são denominadas **probabilidades a priori**.

Definição 2.3.1. ***Regra de Laplace*** — *Em experiências aleatórias com um espaço de resultados finito em que todos os acontecimentos elementares* (N) *são igualmente prováveis e mutuamente exclusivos e, se alguns desses acontecimentos elementares são favoráveis à ocorrência de um dado acontecimento* A (N_A)*, então a probabilidade de realização desse acontecimento* A *é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis à ocorrência do acontecimento* A *e o número de casos possíveis dessa experiência aleatória.*

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{\textit{N.º de casos favoráveis a A}}{\textit{N.º de casos possíveis}} \tag{3.1}$$

Esta definição levanta alguns problemas sendo um deles a pressuposição de que todos os acontecimentos elementares são equiprováveis. Este pressuposto revela o caráter circular desta definição aparecendo assim o conceito de provável para definir probabilidade. Uma forma de fazer face a este problema é o chamado **"Princípio da Razão Insuficiente"** que afirma que, quando não dispomos de qualquer informação que ponha em causa a consideração de que os casos são igualmente credíveis, é razoável supor que todos têm a mesma probabilidade (Fernandes, 2014).

2.3.2 Conceito frequencista, teórico ou *a posteriori*

"Estive a jogar dados com uns amigos. Lancei cinco vezes e saiu sempre o 4. Pensei que, se apostasse que saía 4 na jogada seguinte, a probabilidade de ganhar era quase certa, mas perdi! ..."

Será que nesta situação poderíamos concluir que as faces do dado não tinham a mesma probabilidade de sair? Que a probabilidade de sair a face 4 era igual à probabilidade de sair outra qualquer face? Seria o dado perfeito?

Para dar resposta a esta questão teríamos de repetir o lançamento do dado um grande número de vezes e calcular a frequência relativa da realização de cada acontecimento. Determinaríamos assim uma estimativa para a probabilidade de cada acontecimento. Se o dado fosse "perfeito" diz-nos a intuição que esta probabilidade deverá rondar o valor $\frac{1}{6} = 0.1(6)$. Se lançarmos uma moeda 1000 vezes e verificarmos que obtemos face nacional 572 vezes, podemos estimar que a probabilidade de obter face nacional é $\frac{572}{1000} = 0.572$

A ideia fundamental que está subjacente a este conceito de probabilidade é a de que a probabilidade de um acontecimento pode ser avaliada ou estimada observando a frequência relativa do mesmo acontecimento numa sucessão numerosa de experiências idênticas e independentes. Nestas circunstâncias, verifica-se que, embora os resultados individuais se mostrem irregulares, a ponto de iludir qualquer tentativa de previsão exata, os resultados obtidos ao cabo de uma longa série de repetições exibem uma impressionante regularidade estatística quando tomados em conjunto (Murteira et al., 2007).

Assim, quando se repete uma experiência aleatória um grande número de vezes, em condições semelhantes, definido um acontecimento A, é de verificação empírica que, quando o número de experiências aumenta, há uma tendência para a estabilização da frequência relativa em torno de um número que os frequencistas tomam como valor aproximado da probabilidade, $P(A)$.

As probabilidades assim estimadas são estabelecidas *a posteriori*, com base nos resultados observados pela realização de experiências aleatórias, permitindo-nos determinar apenas uma estimativa da probabilidade. A probabilidade exata é o limite para que tende a frequência relativa de um acontecimento individual inserido num coletivo, que é uma classe infinita de acontecimentos "semelhantes" que se assume terem certas propriedades "aleatórias" (Fernandes, 2014).

Definição 2.3.2. *A probabilidade de um acontecimento A é igual ao limite da razão entre o número de vezes que se observou a sua realização (n_A), num número crescente de realizações da experiência aleatória (n), isto é, é igual ao limite do valor obtido para a frequência relativa da realização desse acontecimento, num número crescente de repetições da experiência aleatória, feitas sempre em condições semelhantes.*

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

Baseado no conceito frequencista de probabilidade, Bernoulli formulou a **Lei dos Grandes Números** que diz que "para um grande número de experiências, tendo cada uma um resultado aleatório, a frequência relativa de cada um desses resultados tende a estabilizar, convergindo para um certo número que constitui a probabilidade desse resultado". Esta lei relaciona o conceito frequencista de probabilidade com o conceito clássico.

A aplicação prática deste conceito levanta também algumas dificuldades sendo uma delas a impossibilidade de alguns acontecimentos poderem ser repetidos um grande número de vezes e outra a impossibilidade de realizar séries infinitas de experiências nas mesmas condições.

2.3.3 Conceito subjetivo ou personalista

"O céu esta carregado de nuvens negras. É muito provável que chova ainda hoje"

Esta situação, apesar de poder ser pensada a nível probabilístico, não pode ser abrangida nem pelo conceito clássico nem pelo conceito frequencista. Poderíamos dizer "O céu está carregado de nuvens negras. A probabilidade que chova ainda hoje é 90%". Mas como chegaríamos a este valor? A regra de Laplace (3.1) não pode ser aplicada, e este acontecimento é único, isto é, não pode ser repetido. Ainda que haja informações de ocorrências passadas similares, não há informação disponível, em forma de frequência, de experiências realizadas nas mesmas condições. As informações existentes, sobre o sucedido noutros dias com o céu carregado de nuvens, diferem com certeza em alguma situação (a temperatura não seria a mesma, ou a intensidade ou a direção do vento, ...).

Assim, o valor encontrado (90%) não será mais do que o *grau de convicção* do observador sobre uma situação que ocorrerá uma única vez. Um outro observador, com outras informações poderá atribuir um outro valor pois o seu grau de convicção será diferente.

O conceito que permite explicar esta probabilidade é o conceito subjetivista (ou personalista). A probabilidade resulta, neste caso, de uma avaliação de situações de incerteza inerentes à mente do sujeito. Cada observador pode emitir a sua própria estimativa de probabilidade, baseando-se na respetiva experiência e no resultado da sua única observação.

Definição 2.3.3. *Se A for um acontecimento e I a informação que o observador possui num certo instante, então a probabilidade de A depende de I. Variando I, varia a probabilidade. Sendo a informação diferente de observador para observador, as probabilidades dependem dos observadores (Murteira et al., 2007).*

2.3.4 Conceito axiomático ou estrutural

Tanto o conceito clássico como o frequencista assentam em noções algo vagas: A expressão "igualmente provável" e a expressão "suficientemente grande". As dificuldades em definir corretamente o significado destas expressões levou a que alguns matemáticos procurassem um novo conceito de probabilidade, utilizando conjuntos e definindo uma série de axiomas.

Um desses matemáticos foi Kolmogrov que estabeleceu a definição axiomática de Probabilidade, em 1933, na sua obra *Foundations of the Theory of Probability.*

Kolmogrov estabeleceu então uma série de axiomas, baseado nas propriedades das frequências relativas e nas operações sobre conjuntos, a partir dos quais se obtiveram, por dedução lógica, proposições e teoremas e que, no seu conjunto, constituíram a Teoria Matemática das Probabilidades (Murteira et al., 2007).

Dada uma experiência aleatória a que corresponda o espaço de resultados Ω, uma função de probabilidade P é qualquer função que satisfaça os três axiomas seguintes:

Axioma 1. *A probabilidade de um acontecimento A é sempre uma quantidade não negativa.*

Isto é: $P(A) \geq 0$.

Axioma 2. *A probabilidade do acontecimento certo é 1.*

Isto é: $P(\Omega) = 1$.

Axioma 3. *A probabilidade da reunião de dois acontecimentos A e B incompatíveis, $A \cap B = \emptyset$, é igual à soma das suas probabilidades.*

Isto é: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Em muitas situações, nomeadamente quando o espaço de resultados é infinito, deve substituir-se este axioma pelo seguinte:

Para qualquer sucessão de acontecimentos mutuamente exclusivos,$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, isto é, acontecimentos para os quais $A_i \cap A_j = \emptyset$ quando $i \neq j$, temos que:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Estes axiomas são aplicáveis seja qual for a interpretação de probabilidade e, como tal, permitem o desenvolvimento da teoria matemática das probabilidades com total independência dessas interpretações (Vairinhos, 1996).

2.4 Algumas propriedades sobre probabilidades

Baseados na axiomática de Kolmogorov poderemos deduzir algumas propriedades e teoremas:

Teorema 2.4.1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Demonstração. Uma vez que $A \cup \overline{A} = \Omega$ segue-se, pelo axioma 2, que:

$P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1$

Mas como A e $\overline{A}$ são disjuntos, pelo axioma 3, temos:

$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$

logo $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ e portanto $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ □

Teorema 2.4.2. $P(\emptyset) = 0$

Demonstração. $\Omega \cup \emptyset = \Omega$, sendo Ω e $\emptyset$ acontecimentos disjuntos, pois $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$.

Logo $P(\Omega \cup \emptyset) = 1 = P(\Omega) + P(\emptyset)$.

Mas como, pelo axioma 2, se sabe que $P(\Omega) = 1$, segue-se que $1 = 1 + P(\emptyset)$, de onde resulta $P(\emptyset) = 0$ □

Teorema 2.4.3. $P(A) \leq 1$

Demonstração. $\overline{A}$ é um acontecimento. Logo $P(\overline{A}) \geq 0$.

Mas como $P(A) = 1 - P(\overline{A})$, então $P(A) \leq 1$ □

Teorema 2.4.4. $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

Demonstração. $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$ e $B - A = \overline{A} \cap B$.

Mas $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$ logo, sendo $(A \cap B)$ e $(\overline{A} \cap B)$ conjuntos disjuntos, pelo axioma 3, podemos dizer que

$$\begin{aligned}
&P\left((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)\right) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)\\
&P(B) = P(A \cap B) + P(B - A)\\
&P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.4.5. $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B)$

Demonstração. $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$. Uma vez que $B \cap A$ e $B \cap \overline{A}$ são disjuntos, as probabilidades podem somar-se. Logo, $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$, ou seja:

$$P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(B \cap A)$$

□

Teorema 2.4.6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demonstração. Temos $A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A})$, sendo A e $(B \cap \overline{A})$ disjuntos. Logo $P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \overline{A})$ pelo axioma 3.

Mas pelo teorema 2.4.5., $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B)$. Logo,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

No caso particular de A e B serem disjuntos, então $A \cap B = \emptyset$ e tem-se

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

□

Teorema 2.4.7. *Se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$.*

Demonstração. Se $A \subset B$ então $B = A \cup (B - A)$, sendo que esta união é disjunta. Logo, pelo axioma 3, segue que

$$P(B) = P(A) + P(B - A).$$

Como $P(B - A) \geq 0$ temos então $P(A) \leq P(B)$. □

Teorema 2.4.8. *Se $A \subset B$ então $P(B - A) = P(B) - P(A)$.*

Demonstração. Sabemos que $B = A \cup (B - A)$ e ainda que $A \cap (B - A) = \emptyset$. Assim, pelo axioma 3

$$P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A).$$

Logo, $P(B - A) = P(B) - P(A)$. □

2.5 Probabilidade condicionada e independência

2.5.1 Probabilidade condicionada

Quando falamos que os resultados obtidos em sucessivos lançamentos de uma moeda são *independentes* queremos dizer que, apesar de repetirmos a experiência em idênticas condições, não podemos prever o que se vai verificar no próximo lançamento, com base no sucedido em lançamentos anteriores. Dizemos assim que a moeda não tem memória.

No entanto, ao resolver alguns problemas de cálculo de probabilidades, por vezes surge a necessidade de calcular a probabilidade de um acontecimento, quando se dispõe de informações que vão condicionar a sua ocorrência.

Vejamos o seguinte exemplo: Consideremos o naipe de copas de um baralho completo de cartas. As cartas são baralhadas e depois alinhadas. É atribuído um prémio se a carta na segunda posição for o rei. Qual a probabilidade de ganhar o prémio?

Consideremos duas situações para as regras deste jogo:

1º – O jogador levanta a segunda carta, sem ver a primeira;

2º – Vê a primeira carta e verifica que não é o rei.

Como podemos obter a probabilidade de ganhar o prémio em cada uma destas situações?

1º – Estando as 13 cartas baralhadas, a probabilidade do rei estar na 2ª posição, ou em outra qualquer, é de $\frac{1}{13}$. Existem 13 posições igualmente possíveis das quais apenas uma é favorável. Assim $P(Rei) = \frac{1}{13}$ (Regra de Laplace).

2º – Nesta situação, como sabemos antecipadamente que a primeira carta não é Rei, teremos apenas 12 cartas alinhadas de forma aleatória sendo uma delas o Rei. Neste caso, a probabilidade do rei estar na 2ª posição é de $\frac{1}{12}$.

O acontecimento para o qual pretendemos determinar a probabilidade é exatamente o mesmo em ambas as situações, "o rei estar colocado na 2ª posição". No entanto, na segunda situação, é-nos fornecida uma informação que *condiciona* a probabilidade do rei se encontrar na 2ª posição: a 1ª carta não é o rei. Esta probabilidade é chamada de *probabilidade condicionada*.

A probabilidade condicionada pode interpretar-se como uma reavaliação da probabilidade de um acontecimento quando se tem a informação de que outro acontecimento se realizou. Uma vez conhecida a realização desse outro acontecimento, B, o espaço de resultados deixa de ser Ω e passa a ser B. Deste modo, o acontecimento A só se realiza quando se realiza $A \cap B$ (Murteira et al., 2007).

Definição 2.5.1. ***Probabilidade Condicionada*** — *Dados dois acontecimentos, A e B, a probabilidade de A se realizar sabendo que B se realizou ou probabilidade de A condicionada por B, designada por $P(A|B)$, é definida por*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad se \quad P(B) > 0 \tag{5.2}$$

Da definição de probabilidade condicionada obtemos a **Regra do Produto de Probabilidade**

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) \tag{5.3}$$

Analogamente, se $P(A) > 0$,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

Murteira (Murteira et al., 2007) refere que o conceito de probabilidade condicionada satisfaz o sistema axiomático, uma vez que verifica os axiomas 1, 2 e 3 sendo, por isso uma medida de probabilidade. Assim,

- $P(A|B) \geq 0$, para todo o acontecimento A e B;
- $P(\Omega|B) = 1$ para todo o acontecimento B;
- $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$ com $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ e para todo o acontecimento B.

Caso particular $P(A|B) + P(\overline{A}|B) = 1$

$$\left(P(A|B) + P(\overline{A}|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1\right)$$

2.5.2 Acontecimentos Independentes

Sinteticamente podemos dizer que dois acontecimentos A e B, de probabilidades não nulas, são *independentes* se a ocorrência de um deles não afetar a probabilidade de ocorrência do outro. Ou seja:

Definição 2.5.2. *O acontecimento* A é independente do acontecimento B*, se a probabilidade de A se verificar for igual à probabilidade condicional de A se verificar, dado que B se verificou*

$$P(A|B) = P(A) \quad e \quad P(B|A) = P(A).$$

Mas, ao se verificarem estas condições, podemos dizer que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \tag{5.4}$$

e temos uma outra definição de independência de acontecimentos

Definição 2.5.3. *Dois acontecimentos A e B não impossíveis dizem-se* independentes *se e só se* $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Apesar de menos intuitiva esta é uma definição bastante utilizada na resolução de exercícios na disciplina de MACS.

Podemos dizer ainda que se os acontecimentos A e B são independentes também o são:

- A e $\overline{B}$

  Demonstração. $P(A \cap \overline{B}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \times P(B) = P(A) \times [1 - P(B)] = P(A) \times P(\overline{B})$

  Logo A é independente de $\overline{B}$ porque $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B})$ □

- $\overline{A}$ e $\overline{B}$

  Demonstração. $(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B) = P(\overline{A}) - P(B)\,(1 - P(A)) = P(\overline{A}) - P(B) \times P(\overline{A}) = P(\overline{A})\,(1 - P(B)) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$

  Logo $\overline{A}$ é independente de $\overline{B}$ porque $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$ □

- $\overline{A}$ e B

Demonstração. Análoga à demonstração da independência entre A e $\overline{B}$ □

2.5.3 Probabilidade Total

Consideremos $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ acontecimentos que constituem uma *partição* do espaço de resultados Ω, isto é:

- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$
- $P(A_i) > 0$ para todo $i = 1, 2, 3, \cdots, n$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$

Graficamente:

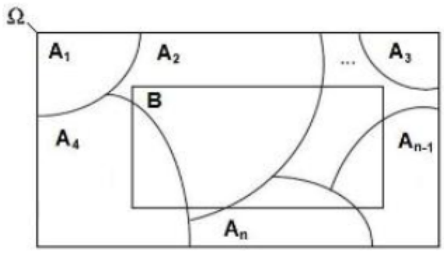


Figura 2.8: Esquema do Teorema da probabilidade total

O teorema da **probabilidade total** indica o valor da probabilidade de um acontecimento, B, quando se sabe que esse acontecimento se deve a uma série de causas possíveis e incompatíveis. Temos então:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + \cdots + P(B \cap A_n) \tag{5.5}$$

ou, atendendo à regra do produto (5.3), podemos escrever

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i),\ P(A_i) > 0 \tag{5.6}$$

2.5.4 Teorema de Bayes

A probabilidade condicionada permite obter a probabilidade de um acontecimento sabendo que outro acontecimento ocorreu previamente — **propriedade *a priori***. Esta probabilidade é muita vezes atribuída pela pessoa que está a analisar o problema, sendo em muitos casos subjetiva, traduzindo o grau de confiança que essa pessoa tem na realização desse acontecimento.

Mas por vezes estamos interessados na situação inversa, isto é, em determinar a probabilidade de um acontecimento ter ocorrido tendo em conta que um acontecimento posterior teve lugar — **propriedade *a posteriori***.

O método de calcular a probabilidade da causa, se se conhece o efeito é dado pelo **Teorema de Bayes**. Este teorema é também chamado de *Teorema das Causas* (Neves et al., 1998).

Este teorema pode ser deduzido da expressão da probabilidade condicional, (5.2), substituindo o numerador de

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

por

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

. e obtendo-se

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

.

Generalizando para n acontecimentos a formulação do Teorema de Bayes é a seguinte:

Teorema 2.5.4. Teorema de Bayes — *Sejam $\{A_1, A_2, A_3, A_n\}$ acontecimentos que constituem uma partição do espaço de resultados, isto é, A_i e A_j são disjuntos dois a dois e a união dos acontecimentos A_i é igual ao espaço de resultados, Ω e onde $P(A_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$. Seja B um outro acontecimento de Ω tal que $P(B) > 0$. Então para $k = 1, 2, \cdots, n$ tem-se:*

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)} \tag{5.7}$$

Demonstração. Por definição de probabilidade condicionada (5.2) tem-se $P(A_i) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$

Relembrando que $P(A_i \cap B) = P(B|A_i) \cdot P(A_i)$ (5.3) e usando o teorema da probabilidade total (5.6) obtemos o resultado apresentado. □

2.5.5 Instrumentos de organização de informação

Na resolução de exercícios envolvendo probabilidade condicionada o programa de MACS refere claramente como objetivos a atingir "mostrar a utilidade das árvores de probabilidades como instrumento de organização de informação quando se está perante uma cadeia de experiências aleatórias" e "apresentar a definição de probabilidade condicional (tomando como base uma representação em diagrama de Venn de uma população classificada de forma cruzada segundo diversas categorias (Prog. de MACS, 2001, p. 21).

Neste documento é referido também que os alunos deverão ser capazes, a partir de informação registada numa tabela de contingência, de calcular corretamente probabilidades condicionadas.

Apresentaremos, de seguida, alguns exemplos, retirados tanto de manuais da disciplina de MACS, como de exames nacionais da disciplina onde se utilizam estes diferentes recursos no cálculo da probabilidade condicionada.

2.5.5.1 Tabelas de contingência

Uma tabela de contingência é um processo de organizar a informação correspondente a dados bivariados.

De uma maneira geral, uma tabela de contingência é uma representação dos dados, quer de tipo qualitativo, quer de tipo quantitativo, especialmente quando estes podem ser classificados segundo dois critérios. São utilizadas para registar a relação entre as variáveis.

O aspeto de uma tabela de contingência é o de uma tabela de dupla entrada com linhas, correspondentes a um dos critérios, e com colunas, correspondente ao outro critério.

Os exemplos seguintes ilustram a utilização de tabelas de contingência na resolução de exercícios.

Exemplo 2.5. *Numa escola, há professores de ambos os géneros (masculino e feminino), uns fumadores, outros não. A tabela seguinte mostra o número de indivíduos em cada um dos casos:*

	Masculino (M)	**Feminino (F)**	**Totais**
Fumadores (S)	5	10	**15**
Não fumadores ($\overline{S}$)	15	50	**65**
Totais	**20**	**60**	**80**

Escolhendo um professor ao acaso, qual é a probabilidade de:

1. *Ser do género masculino?*

2. *Ser fumador?*

3. *Ser fumador, sabendo que é do género masculino?*

(Exercício retirado de (Longo & Branco, 2011, p.128))

As duas primeiras questões, 1 e 2, resolvem-se aplicando diretamente a Lei de Laplace:

Analisando a tabela verificamos que o número de elementos do género masculino é 20 (casos favoráveis) e o número total de professores é 80 (casos possíveis). Logo, a probabilidade do professor ser do género masculino é:

$$P(M) = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$$

Do mesmo modo, verificamos que o número de fumadores é 15 num total de 80 professores. Assim, a probabilidade pedida é:

$$P(S) = \frac{15}{80} = \frac{3}{16}$$

No caso da questão 3, é-nos dada uma informação *a priori*, que irá condicionar a probabilidade. Estamos perante uma probabilidade condicionada. Queremos determinar a probabilidade de ser fumador sabendo, à partida, que é do género masculino.

Intuitivamente poderemos raciocinar da seguinte forma: dizendo à partida que o professor é do género masculino, o número de casos possíveis foi reduzido passando a ser 20 e não os 80 professores existentes. Dentro do género masculino, há 5 professores fumadores, sendo este o número de casos favoráveis. A probabilidade pedida será, então:

$$P(S|M) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Aplicando a fórmula resultante de 5.2 temos:

$$P(S|M) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{5}{80}}{\frac{20}{80}} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Exemplo 2.6. *Um aluno costuma ir a pé para a escola, mas, às vezes, desloca-se de automóvel com os pais:*

- 80% *das vezes vai a pé;*
- *a probabilidade de chegar atrasado é de* 20%
- *se for a pé, a probabilidade de chegar atrasado é de* 15%

Determine a probabilidade de o aluno:

1. *chegar atrasado, sabendo-se que foi de automóvel;*
2. *Não chegar atrasado, sabendo-se que foi a pé;*

3. Ir a pé, sabendo-se que chegou atrasado.

(Exercício retirado de (Longo & Branco, 2011, p.129))

Para resolver este tipo de questões é conveniente elaborar previamente uma tabela de contingência.

Consideremos então os acontecimentos A e B:

A: "chegar atrasado"

B: "ir a pé"

$$P(B) = 80\% = 0.8$$

$P(A|B) = 15\%$ traduz a afirmação "Se for a pé, a probabilidade de chegar atrasado é de 15%", que dito por outras palavras diz "a probabilidade de chegar atrasado, sabendo que vai a pé, é de 15%."

$$P(A|B) = 15\% = 0.15$$

Atendendo à definição de probabilidade condicionada, (5.2), e às propriedades das operações com acontecimentos podemos dizer que:

$$\begin{aligned} P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} &\Leftrightarrow P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(A\cap B) = 0.15 \times 0.80 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(A\cap B) = 0.12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\overline{A}\cap B) &= P(B) - P(A\cap B) = \\ &= 0.80 - 0.12 = \\ &= 0.68 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A\cap \overline{B}) &= P(A) - P(A\cap B) = \\ &= 0.20 - 0.12 = \\ &= 0.08 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) = \\ &= 0.20 - 0.08 = \\ &= 0.12 \end{aligned}$$

Com estes dados podemos preencher completamente a tabela de contingência que traduz os dados do problema.

	Ir a pé (B)	**Ir de carro ($\overline{B}$)**	**Totais**
Chegou atrasado (A)	0.12	0.08	**0.20**
Não chegou atrasado ($\overline{A}$)	0.68	0.12	**0.80**
Totais	**0.80**	**0.20**	**1**

Pela analise da tabela é fácil de responder às questões:

1. $P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{0.08}{0.20} = \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$

2. $P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.68}{0.80} = \dfrac{17}{20}$

3. $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0.12}{0.20} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$

2.5.5.2 Árvore de probabilidades

Uma árvore de probabilidades é uma representação esquemática em árvore, especialmente pensada para apresentar todos os casos possíveis e respetivas probabilidades, em situações que envolvam uma sequência de experiências aleatórias cujos espaços de resultados sejam de dimensão reduzida. Do nó inicial da árvore partem tantos ramos, quantos os acontecimentos elementares do espaço de resultados correspondente à primeira experiência aleatória. Nos extremos de cada ramo indica-se o acontecimento respetivo e por cima do ramo a sua probabilidade. Passando ao nível seguinte, o extremo de cada ramo será um nó para a segunda experiência aleatória. A informação é registada de forma idêntica à descrita para o primeiro nó, mas tendo agora em conta que as probabilidades são as condicionais ao acontecimento que figura no novo nó. O processo repete-se até atingir a última experiência aleatória (Martins, 2005).

Exemplo 2.7. *Um restaurante apresenta apenas dois tipos de refeições: salada completa ou um prato à base de carne. Considere que 20% dos fregueses do sexo masculino preferem a salada, 30% das mulheres escolhem carne. Sabe-se também que 75% dos fregueses são homens. Para um freguês selecionado ao acaso desse restaurante, obtenha a probabilidade de:*

1. *preferir salada;*

2. *preferir carne dado que é homem;*

3. *ser uma mulher, sabendo-se que prefere salada.*

Consideram-se os seguintes acontecimentos:

H="O freguês é homem" M="O freguês é mulher"

S="O freguês prefere salada" C="O freguês prefere carne"

Pelo enunciado temos que:

$P(H) = 75\% = 0.75$

$P(S|H) = 20\% = 0.20$

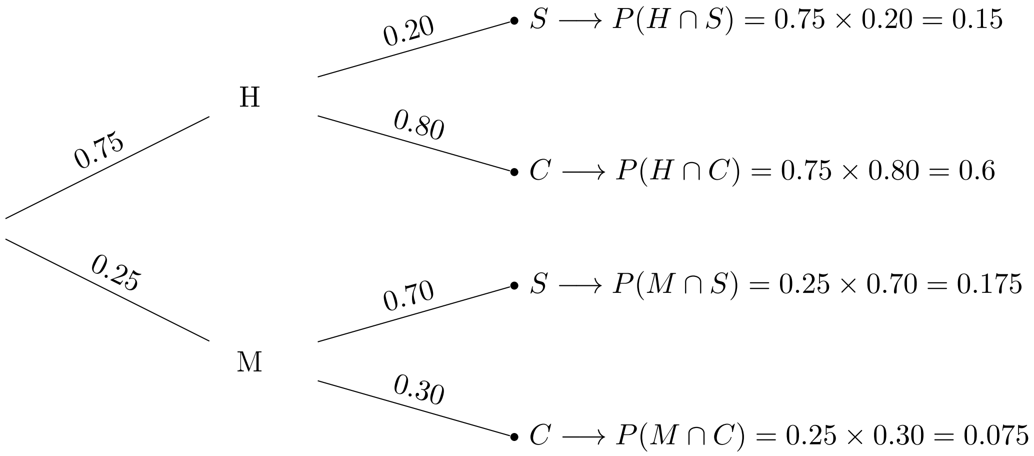
$P(C|M) = 30\% = 0.30$

Para construir o diagrama de árvore que sintetize a informação fornecida teremos apenas de determinar alguns valores, nomeadamente, $P(M)$, $P(C|H)$ e $P(S|M)$.

Sendo $P(H) = 0.75$ podemos afirmar que $P(M) = 1 - 0.75 = 0.25$.

Se 20% dos homens preferem salada, 80% preferem carne e se 30% as mulheres escolhem carne, as restantes 70% escolhem salada.

Podemos agora completar o diagrama de árvore



e, recorrendo ao diagrama, responder às questões colocadas.

A probabilidade de o freguês preferir salada é dada por

$$P(S) = P(H \cap S) + P(M \cap S) = 0.15 + 0.175 = 0.325$$

A probabilidade de o freguês preferir carne dado que é homem é dada por

$$P(C|H) = 0.80$$

A probabilidade de o freguês ser mulher sabendo-se que prefere salada é dada por $P(M|S)$

Esta informação não pode ser retirada diretamente do diagrama de árvore mas sabemos, pelo Teorema de Bayes (5.7), que

$$P(M|S) = \frac{P(M) \cdot P(S|M)}{P(M) \cdot P(S|M) + P(H) \cdot P(S|H)} = \frac{0.25 \times 0.70}{0.25 \times 0.70 + 0.75 \times 0.20} \approx 0.538$$

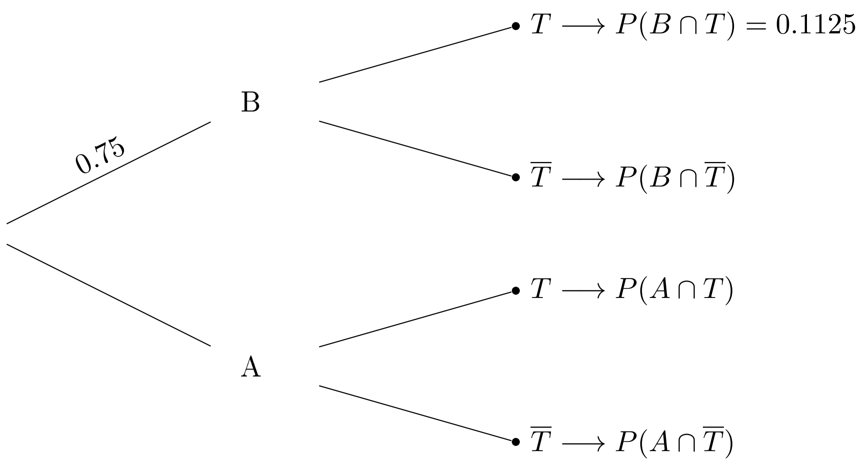
Exemplo 2.8. *Um indivíduo que trabalha em Lisboa, mas reside na margem Sul do Tejo, tem diariamente duas possibilidades para se dirigir ao trabalho: o barco ou o autocarro. Ele gosta muito de ir de barco, pelo que escolhe o barco 75% das vezes. A probabilidade de chegar atrasado ao trabalho é 16.25%. Sabe-se ainda que a probabilidade de ir de barco e chegar atrasado é 11.25%. Constrói a árvore de probabilidade que apresente todos os resultados possíveis.*

(Exercício adaptado de (Martins, 2005, p.158))

Vamos construir uma árvore de probabilidade que resuma a informação dada no enunciado do problema

Comecemos por considerar os acontecimentos

A:"Ir de autocarro" B:"Ir de barco" T:"Chegar atrasado"



Colocamos neste diagrama a informação dada. Usando esta informação podemos calcular a probabilidade dos restantes acontecimentos representados neste esquema.

Se $P(B) = 0.75$ podemos dizer que $P(A) = 1 - 0.75 = 0.25$

Sabemos que $P(T|B) = \dfrac{P(B \cap T)}{P(B)}$, logo

$$\begin{aligned} P(T|B) &= \frac{P(B \cap T)}{P(B)} = \\ &= \frac{0.1125}{0.75} = \\ &= 0.15 \end{aligned}$$

Daqui calculamos $P(\overline{T}|B) = 1 - P(T|B) = 1 - 0.15 = 0.85$

Se a probabilidade de chegar atrasado ao trabalho é 16.25% dizemos que $P(T) = 0.1625$. Sendo assim, considerando o teorema da probabilidade total (5.6)

$$\begin{aligned} P(T) &= P(B \cap T) + P(A \cap T) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0.1625 &= 0.1125 + P(A \cap T) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(A \cap T) &= 0.1625 - 0.1125 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(A \cap T) &= 0.05 \end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned} P(T|A) &= \frac{P(A \cap T)}{P(A)} = \\ &= \frac{0.05}{0.25} = \\ &= 0.2 \end{aligned}$$

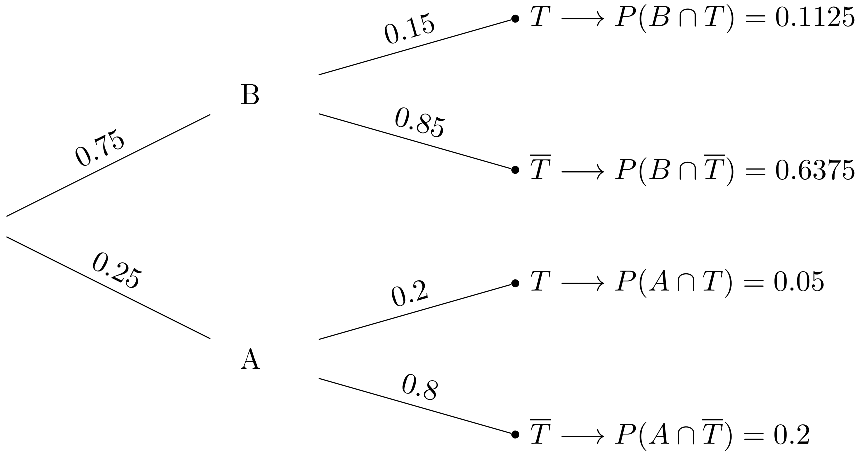
e daqui calculamos $P(\overline{T}|A) = 1 - P(T|A) = 1 - 0.2 = 0.8$

Falta apenas calcular $P(A \cap \overline{T})$ e $P(B \cap \overline{T})$ para podermos completar a árvore de probabilidade.

$$P(A \cap \overline{T}) = P(\overline{T}|A) \cdot P(A) = 0.8 \times 0.25 = 0.2$$

$$P(B \cap \overline{T}) = P(\overline{T}|B) \cdot P(B) = 0.85 \times 0.75 = 0.6375$$

Poderemos agora completar a árvore



Daqui podemos determinar diversas probabilidades, como por exemplo:

- $P(T \cup B) = P(B) + P(A \cap T) = 0.75 + 0.05 = 0.80$
- $P(\overline{T} \cap \overline{B}) = 1 - P(T \cup B) = 1 - 0.80 = 0.20$

2.5.5.3 Diagrama de Venn

Dá-se o nome de diagrama de Venn a todo o diagrama que possibilita a visualização de propriedades e de relações entre um número finito de conjuntos. São representados por linhas fechadas, desenhadas sobre um plano, de forma a representar os conjuntos e as diferentes relações existentes entre conjuntos e elementos.

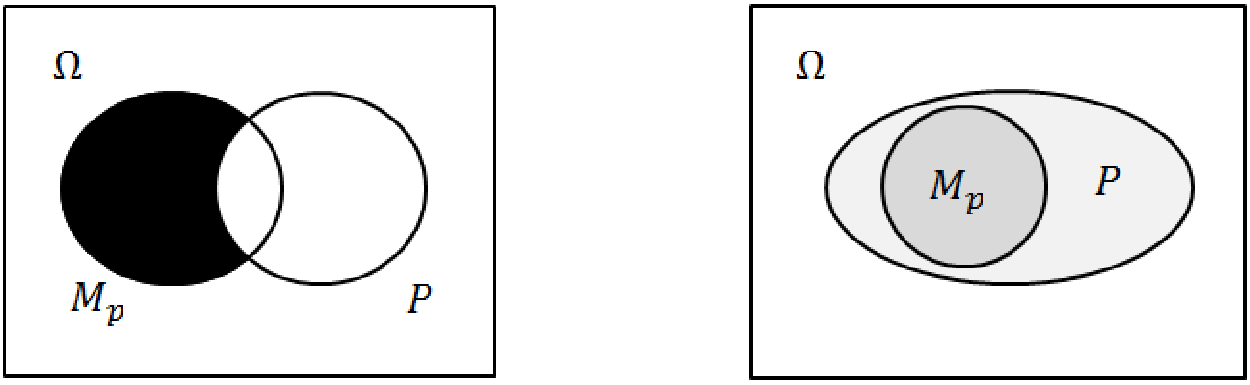
Nestes diagramas estão representadas todas as combinações possíveis entre diferentes conjuntos, sendo sombreadas as regiões onde não existam quaisquer elementos.

Os diagramas de Euler, criados antes dos diagramas de Venn, são similares aos de Venn, usando normalmente círculos intersetados; a diferença consiste no facto de estes não necessitarem de mostrar todas as possíveis relações, mas apenas as relações específicas de cada problema. Isso torna a representação, na maioria dos casos, visualmente mais simples.

Exemplo 2.9. *Consideremos os conjuntos:*

$$P = \{Portugueses\} \qquad M_p = \{Mulheres\ portuguesas\}$$

A representação, em termos gráficos, destes dois conjuntos, e tendo em atenção que todas as mulheres portuguesas são portuguesas, poderá ser feita das seguintes formas, dependendo de estarmos a utilizar um diagrama de Venn ou um diagrama de Euler.



(a) Diagrama de Venn (b) Diagrama de Euler

Figura 2.9: Representações em diagramas de Venn e de Euler

Não existem mulheres portuguesas que não sejam portuguesas. Sendo assim, no diagrama de Venn da figura a região que corresponde ao conjunto das mulheres portuguesas que não são portuguesas (conjunto vazio) é sombreada de negro enquanto que no diagrama de Euler o conjunto das mulheres portuguesas é incluído no conjunto dos portugueses.

O diagrama habitualmente utilizado para a representação desta situação é o diagrama de Euler, ao qual abusivamente, mas com frequência, chamamos Diagrama de Venn.

Exemplo 2.10. *A Joana e a Maria, irmãs gémeas, são alunas da Escola Secundária de Mornas e frequentam a mesma turma.*

O professor de Educação Física da turma das gémeas pediu aos alunos a elaboração de um trabalho sobre a prática de desporto.

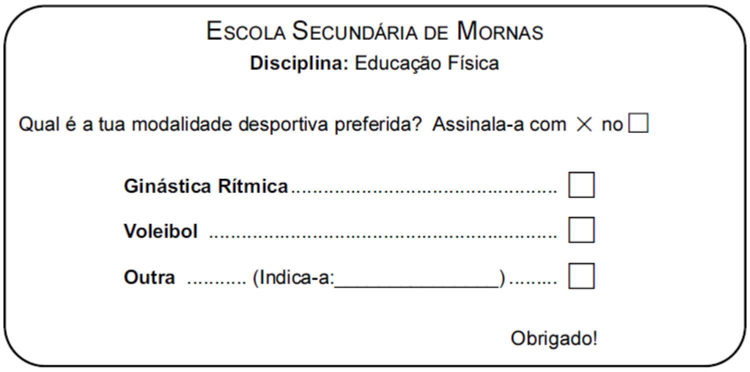
A Joana é uma praticante de Voleibol, e a Maria é uma praticante de Ginástica Rítmica. Por isso, a Joana e a Maria optaram por questionar todos os alunos da Escola Secundária de Mornas sobre a aceitação das modalidades Voleibol e Ginástica Rítmica naquela escola. O modelo de questionário utilizado para recolher os dados está representado na Figura 2.10

As gémeas recolheram as respostas dos 632 alunos da escola, incluindo as delas próprias.

Todos os alunos responderam ao questionário e colocaram, pelo menos, um "X".

Ao contabilizar os resultados, a Joana contou 125 preferências para "Ginástica Rítmica", 156 para "Voleibol" e 474 para "Outra" e, ao somar estes valores, pensou que a contagem não estava certa.

A Maria resolveu verificar a contagem e respondeu:



ESCOLA SECUNDÁRIA DE MORNAS

Disciplina: Educação Física

Qual é a tua modalidade desportiva preferida? Assinala-a com × no ☐

Ginástica Rítmica .... ☐

Voleibol .... ☐

Outra .... (Indica-a:______________) .... ☐

Obrigado!

Figura 2.10: Questionário

"Está certo! Porque uns alunos colocaram dois "X", um na "Ginástica Rítmica" e outro no "Voleibol". Verifico, também, que os alunos que escolheram a opção "Outra" só colocaram um "X"."

1. *Determine quantos alunos colocaram apenas um "X" na resposta ao questionário.*

   Sugestão: *elabore um diagrama de Venn com os resultados apurados pelas gémeas.*

2. *Escolheu-se, ao acaso, um aluno da Escola Secundária de Mornas.*

   Calcule a probabilidade de o aluno escolhido preferir "Ginástica Rítmica", sabendo que não escolheu "Outra" quando respondeu ao questionário.

   Apresente o resultado em percentagem, arredondado às centésimas.

(Exercício retirado do exame nacional de MACS de 2011 – 1.ª fase)

No enunciado deste exercício é dado como sugestão a utilização de um diagrama de Venn de forma a traduzir a informação recolhida.

Consideremos, primeiramente, os acontecimentos

GR: "o aluno prefere Ginástica Rítmica"

V: "o aluno prefere Voleibol"

O: "o aluno prefere Outra"

Neste caso, 125 alunos afirmaram preferir "Ginástica Rítmica", 156 preferem "Voleibol" e 474 afirmaram preferir "Outra". Contabilizando estes resultados verificamos que o total de respostas é 755. Mas os alunos que responderam ao questionário foram apenas 632, o que revela que alguns alunos colocaram dois "X", um em "GR" e outro em "V". (Neste caso é-nos fornecida a informação que os alunos que escolheram "Outra" apenas colocaram um "X")

O número de alunos que responderam ter como modalidade favorita "Ginástica Rítmica" **e** "Voleibol" pode ser determinado da forma seguinte:

$$\#(GR \cap V) = 755 - 632 = 123$$

Atendendo a este valor podemos dizer que

$\#(GR - V) = 125 - 123 = 2$ e que $\#(V - GR) = 156 - 123 = 33$

Com estes dados podemos então construir o diagrama de Venn

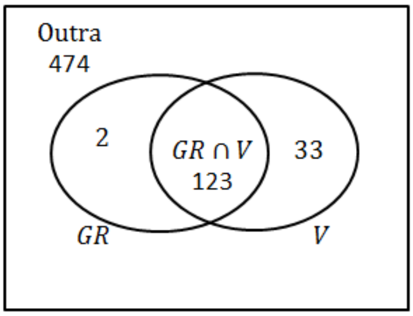


Figura 2.11: Diagrama de Venn

Pela análise direta do diagrama é fácil responder às questões dadas.

1. É possível concluir que existem 123 alunos que escolheram Ginástica Rítmica e Voleibol, tendo os restantes 509 alunos $(632 - 123)$ colocado apenas um "X".

2. Pretendemos determinar a probabilidade de o aluno preferir "Ginástica Rítmica" sabendo que não escolheu "Outra", isto é, pretendemos determinar $P(GR|\overline{O})$

   A partir do diagrama de Venn podemos verificar que existem 125 alunos $(2 + 123)$ que responderam 'Ginástica Rítmica" e não responderam "Outra".

   Verificamos também que existem 158 alunos $(2 + 123 + 33)$ que não responderam outra.

   Assim,

$$P(GR|\overline{O}) = \frac{P(GR \cap \overline{O})}{P(\overline{O})} \quad \Leftrightarrow \quad P(GR|\overline{O}) = \frac{\frac{125}{632}}{\frac{158}{632}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad P(GR|\overline{O}) = \frac{125}{158} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad P(GR|\overline{O}) \approx 79.11\%$$

   A resposta é aproximadamente 79.11%.

Capítulo 3

Variáveis Aleatórias e suas distribuições

3.1 Variáveis Aleatórias

Consideremos a experiência aleatória que consiste em lançar ao ar uma moeda 10 vezes. Em cada lançamento da moeda, os resultados possíveis são "face nacional" ou "face europeia". O espaço de resultados, Ω, é então composto por 2^{10} acontecimentos elementares (sequências de 10 lançamentos distintos). Seria pouco prático realizar os cálculos de probabilidades de acontecimentos expressos com subconjuntos do espaço de resultados. Para além da extensão das listas dos acontecimentos elementares, com frequência, os elementos de Ω não são numéricos (Martins, 2005).

Sendo assim, o conceito de *variável aleatória (v.a.)* permite descrever todos os acontecimentos que ocorrem em resultado de uma experiência aleatória usando apenas os conjuntos dos números reais (Vairinhos, 1996, p.209).

Definição 3.1.1. *Uma variável aleatória (v.a.) é uma função que atribui um valor numérico a cada resultado individual de uma experiência aleatória. O domínio da função é Ω e o conjunto de chegada $\mathbb{R}$. Assim*

$$X : \omega \in \Omega \longrightarrow X(\omega) \in \mathbb{R}$$

Convenções (Vairinhos, 1996):

1. Uma variável aleatória representa-se sempre por uma *letra maiúscula.*
   Exemplo: X é uma variável aleatória.

2. Os valores possíveis – ou realizações – das variáveis aleatórias representam-se por *letras minúsculas*
   Exemplo: A expressão $X(\omega) = x$ significa que a variável aleatória X, assume sobre os resultados ω da experiência aleatória, o valor x.

3. Os acontecimentos $(X(\omega) \leq x)$ podem ser simbolizados abreviadamente por $(X \leq x)$.

Exemplo 3.1. *Consideremos a variável aleatória "face resultante do lançamento de uma moeda de 1 €".*

Os resultados possíveis da experiência aleatória "lançamento de uma moeda e verificar a face voltada para cima" são: *face nacional* e *face europeia.*

Exemplo 3.2. *Consideremos a variável aleatória "número de golos obtidos nos jogos da próxima jornada de futebol".*

Os resultados possíveis da experiência aleatória "número de golos obtidos nos jogos da próxima jornada de futebol" são: $0, 1, 2, 3, \ldots$

As variáveis destes dois exemplos assumem um número finito, ou infinito enumerável, de valores.

Exemplo 3.3. *Consideremos a variável aleatória "peso de um recém nascido".*

Neste caso a variável pode assumir um número infinito (não enumerável), de valores.

Podemos então classificar as variáveis aleatórias em dois tipos: *variável aleatória discreta* e *variável aleatória contínua.*

Uma variável que toma um número finito, ou infinito enumerável de valores, é chamada *variável discreta*, ao passo que uma variável aleatória que toma um número infinito (não-numerável) de valores, é uma *variável contínua* (Spiegel, 1977).

3.2 Variável aleatória discreta

3.2.1 Definição

Definição 3.2.1. *Uma variável aleatória diz-se* discreta*, se e só se assume valores de um conjunto, para o qual se possa estabelecer uma correspondência com um subconjunto dos números inteiros, isto é, só assume um* número finito *ou* infinito enumerável *de valores distintos (Martins, 2005).*

São exemplos de variáveis aleatórias discretas

X = "soma do número de pontos obtidos no lançamento de dois dados"

Y = "número de moradores em cada uma das moradias de uma urbanização"

Exemplo 3.4. *Consideremos a experiência aleatória "lançar uma moeda ao ar 6 vezes e verificar se fica a face nacional voltada para cima".*

Se ficar voltada a face nacional para cima, regista-se "N", se ficar face europeia, regista-se "E".

1. *Qual o espaço de resultados dessa experiência aleatória?*
2. *Seja X a variável aleatória: "Número de vezes que a face nacional fica voltada para cima, nos 6 lançamentos". Que valores pode X assumir?*
3. *Qual o número de resultados do espaço Ω que corresponde a $(X = 2)$?*

(Exercício adaptado de (Vairinhos, 1996, p.212))

Esta experiência consiste em repetir para cada um dos 6 lançamentos a experiência elementar de lançar a moeda, verificar e anotar qual a face que ficou voltada para cima.

O espaço de resultados dessa experiência aleatória é

$$\Omega = \{\text{todas as sequências de 6 lançamentos de uma moeda ao ar}\}$$

Um dos resultados possíveis desta experiência é, por exemplo: $\omega = (NNEENN)$.

O número de resultados possíveis desta experiência é $2^6 = 64$, sendo, por isso, algo exaustiva a enumeração de todos os elementos de Ω.

Interessando apenas o número de vezes que a face nacional fica voltada para cima, independentemente da ordem por que apareçam, podemos associar a esta experiência a variável aleatória X, que representa este número, definida do seguinte modo:

$$X : \Omega \longrightarrow [0, +\infty)$$

em que $X(\omega)$ é o "número de vezes que a face nacional fica voltada para cima, nos 6 lançamentos".

Desta forma:

X(NNNEEE)=3 X(NNNNNN)=6 X(EEEEEE)=0 X(ENNNNE)=4

Seguindo este raciocínio podemos concluir que variável aleatória X apenas pode assumir os valores $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, apesar de $\#\Omega = 64$

O acontecimento $(X(\omega) = 2)$, ou simplesmente, $(X = 2)$, traduz-se, em Ω, pelo subconjunto constituído por todos os elementos do espaço de resultados com dois N's.

Para determinar o número de resultados do espaço de resultados Ω que contêm exatamente 2 $N's$, e que corresponde a $(X = 2)$ teremos, então, que determinar o número de elementos desde subconjunto.

Consideremos A este subconjunto de Ω.

São dois exemplos desses elementos $\omega_1 = (NNEEEE)$ e $\omega_2 = (EEENEN)$, mas para determinar o número de modos de posicionar os dois $N's$ num conjunto de 6 lugares possíveis, deveremos calcular o número de combinações possíveis.

Sendo assim, $\#A = C_2^6 = \dfrac{6!}{4!2!} = 15$

Nota – Na disciplina de MACS "não se justifica, [...] ,o estudo de modelos para situações que obriguem a utilizar técnicas de contagem que envolvam cálculo combinatório" (Prog. de MACS, 2001, p.21). Por este facto o cálculo deste valor não deverá, nesta disciplina, ser feito recorrendo a combinações mas verificando de uma forma empírica que, se uma das faces nacionais pode estar colocada numa das seis posições possíveis, a outra face nacional terá lugar numa das restantes cinco posições. Poderíamos, então, pensar que existiriam $6 \times 5 = 30$ modos de posicionar os dois $N's$ nos seis lugares disponíveis. No entanto não nos podemos esquecer que posicionar uma face nacional no quarto lugar e a outra no sexto lugar, é exatamente o mesmo que posicionar uma face nacional no sexto lugar e outra no quarto lugar. Assim teremos que dividir este número por 2. Desta forma o número de modos de posicionar os dois $N's$ num conjunto de 10 lugares possíveis será dado por $\dfrac{6 \times 5}{2} = 15$.

3.2.2 Função massa de probabilidade.

Consideremos ainda a variável aleatória X: "Número de vezes que a face nacional de uma moeda fica voltada para cima, em 6 lançamentos".

Na secção anterior verificamos que os valores possíveis que esta variável aleatória pode assumir são: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Se associarmos a cada valor da variável aleatória, x_i, a sua probabilidade, p_i obteremos uma tabela 3.1 que faz corresponder a cada valor numérico do espaço de resultados, a sua probabilidade[1].

[1] A forma do cálculo dos valores da probabilidade associada a cada valor da variável será tratado mais à frente

Resultados da exp. aleatória (ω)	$\omega_1 = 0$	$\omega_2 = 1$	$\omega_3 = 2$	$\omega_4 = 3$	$\omega_5 = 4$	$\omega_6 = 5$	$\omega_7 = 6$
Valores da v.a. X (x)	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i) \quad (p_x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64} = \frac{3}{32}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64} = \frac{5}{16}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64} = \frac{3}{32}$	$\frac{1}{64}$

Tabela 3.1: Tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X do exemplo 3.4

Definição 3.2.2. *"Seja X uma variável aleatória (v.a.) do tipo discreto e seja $C = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ o conjunto de valores que $X(\omega)$ pode assumir quando ω percorre o espaço de resultados Ω.*

Então, a função p_x, definida por $p_x(x) = P(X = x)$, em que $x \in C$ designa-se por **função (massa) de probabilidade***" (Vairinhos, 1996).*

A **função massa de probabilidade** (*pmf – Probability Mass Function*), também designada por *função de probabilidade*, é, então, a função que faz corresponder a cada valor x do espaço de resultados enumerável, Ω, um valor real positivo menor ou igual a 1, valor esse que corresponde à probabilidade da variável discreta X assumir o valor x, ou seja, à probabilidade dos acontecimentos que correspondem ao valor x.

Esta função verifica as condições:

- $0 \leq p_x(x) \leq 1$ (as probabilidades são sempre quantidades não negativas)
- $p_x(x) = P(X = x)$ (o valor que a função assume corresponde à probabilidade de a variável X assumir um determinado valor x)
- $\sum_{x \in C_x} p_x(x) = \sum_{x \in C_x} P(X = x) = 1$ (a soma das probabilidades dos diversos valores possíveis de X é igual a 1).

A função de probabilidade apresentada no exemplo 3.4 pode ser definida utilizando uma tabela

	Valores de x_i de X						
	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{64}$

Tabela 3.2: Tabela da função massa de probabilidade da variável aleatória X do exemplo 3.4

ou um gráfico de barras

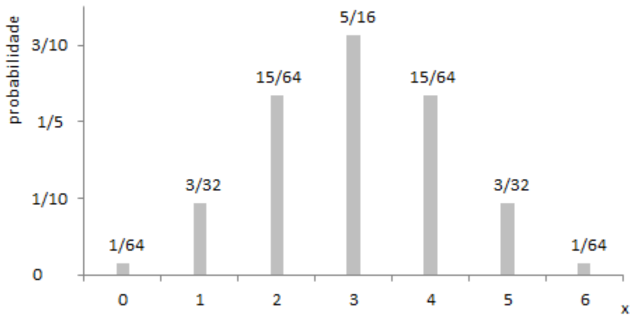


Figura 3.1: Gráfico de barras da função massa de probabilidade da variável aleatória X do exemplo 3.4

3.2.3 Função de Distribuição de Probabilidade.

Exemplo 3.5. *Considera a variável aleatória X: "Número de vezes que a face nacional de uma moeda fica voltada para cima, em 6 lançamentos".*

Como obter as probabilidades dos acontecimentos

1. $P(X \leq 3)$?
2. $P(X \geq 5)$?
3. $P(2 < X \leq 4)$?

Para responder a estas questões, de uma forma geral, basta conhecer quais os valores de X que satisfazem a definição do acontecimento e somar as respetivas probabilidades.

Para responder à questão 1 devemos ter em atenção que

$(X \leq 3) = (X = 0) + (X = 1) + (X = 2) + (X = 3)$ sendo todos estes acontecimentos incompatíveis.

Logo:

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

e utilizando os valores da tabela 3.2

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= \frac{1}{64} + \frac{3}{32} + \frac{15}{64} + \frac{5}{16} \\ &= \frac{42}{64} = \frac{21}{32} \end{aligned}$$

Da mesma forma se procede para as questões 2 e 3.

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= P(X = 5) + P(X = 6) \\ &= \frac{3}{32} + \frac{1}{64} \\ &= \frac{7}{64} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(2 < X \leq 4) &= P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= \frac{5}{16} + \frac{15}{64} \\ &= \frac{35}{64} \end{aligned}$$

Como diz Vairinhos (1996), verificamos que conhecida a função massa de probabilidade de uma v.a. é possível calcular as probabilidades de acontecimentos do tipo $P(X \leq x)$. Basta para isso decompor o acontecimento $(X \leq x)$.

Definição 3.2.3. *Seja X uma v.a. discreta com função de probabilidade $p_x(x_i) = P(X = x_i)$ em que os valores $x_i(i = 1, 2, \cdots)$ são os valores possíveis de X.*

*Seja x um **número real qualquer**. A função*

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_x(x_i) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) \tag{2.1}$$

*dá a probabilidade de que a v.a. assuma valores inferiores ou iguais a x e designa-se por **função de distribuição** de X ou **função de distribuição acumulada** (CDF – Cumulative Distribution Function)*

Propriedade 3.1. $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$

No exemplo apresentado anteriormente (3.4), onde a v.a. é X associada com o número de vezes que a face nacional de uma moeda fica voltada para cima, em 6 lançamentos, podemos afirmar que:

— Quando $x < 0$, tem-se $F_X(x) = 0$; (probabilidade do acontecimento impossível)

— Quando $0 \leq x < 1$, tem-se $F_X(0) = P(X \leq 0) = P(X = 0) = \frac{1}{64} = 0.015625$;

— Quando $1 \leq x < 2$, tem-se $F_X(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{64} + \frac{3}{32} = 0.109375$;

— Quando $2 \leq x < 3$, tem-se $F_X(2) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{64} + \frac{3}{32} + \frac{15}{64} = 0.34375$;

— Quando $3 \leq x < 4$, tem-se $F_X(3) = P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \dfrac{1}{64} + \dfrac{3}{32} + \dfrac{15}{64} + \dfrac{5}{16} = 0.65625$;

e assim sucessivamente até

— Quando $x \geq 6$, tem-se $F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \dfrac{1}{64} + \dfrac{3}{32} + \dfrac{15}{64} + \dfrac{5}{16} + \dfrac{15}{64} + \dfrac{3}{32} + \dfrac{1}{64} = 1$; (probabilidade do acontecimento certo)

Estes resultados podem ser sintetizados da seguinte forma:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ 0.015625 & se \quad 0 \leq x < 1 \\ 0.109375 & se \quad 1 \leq x < 2 \\ 0.34375 & se \quad 2 \leq x < 3 \\ 0.65625 & se \quad 3 \leq x < 4 \\ 0.890625 & se \quad 4 \leq x < 5 \\ 0.984375 & se \quad 5 \leq x < 6 \\ 1 & se \quad x \geq 6 \end{cases}$$

ou graficamente

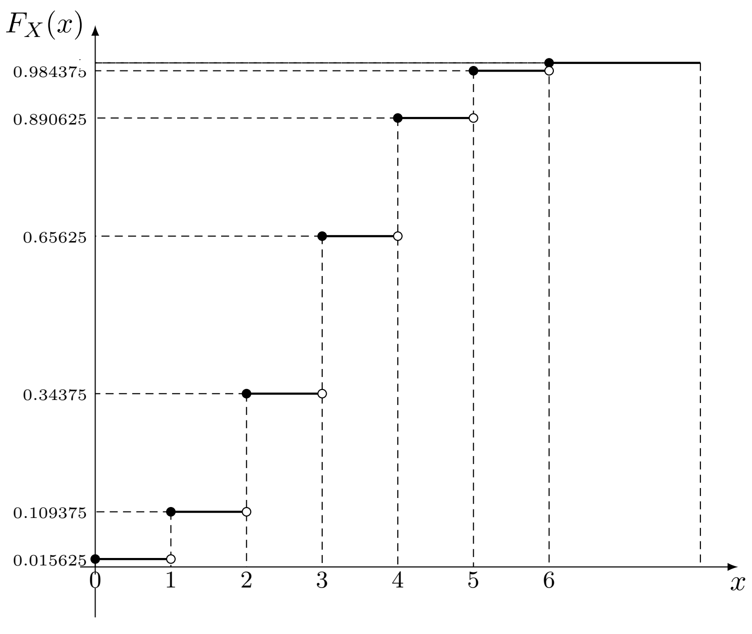


Figura 3.2: Função de distribuição da variável aleatória X do exemplo 3.4

A função de distribuição é uma função em escada, não decrescente, e apresentando descontinuidades ou saltos sucessivos que têm por medida o valor das probabilidades. A soma dos saltos da função de distribuição é igual a 1.

3.3 Variável aleatória contínua

3.3.1 Definição

Definição 3.3.1. *Uma v.a. é do tipo* contínuo *quando puder (conceptualmente e na realidade) assumir todos os valores de um intervalo do conjunto de números reais (Vairinhos, 1996).*

São exemplos de variáveis aleatórias contínuas

X = "Tempo de duração de uma conversa telefónica"

Y = "Peso de um recém nascido"

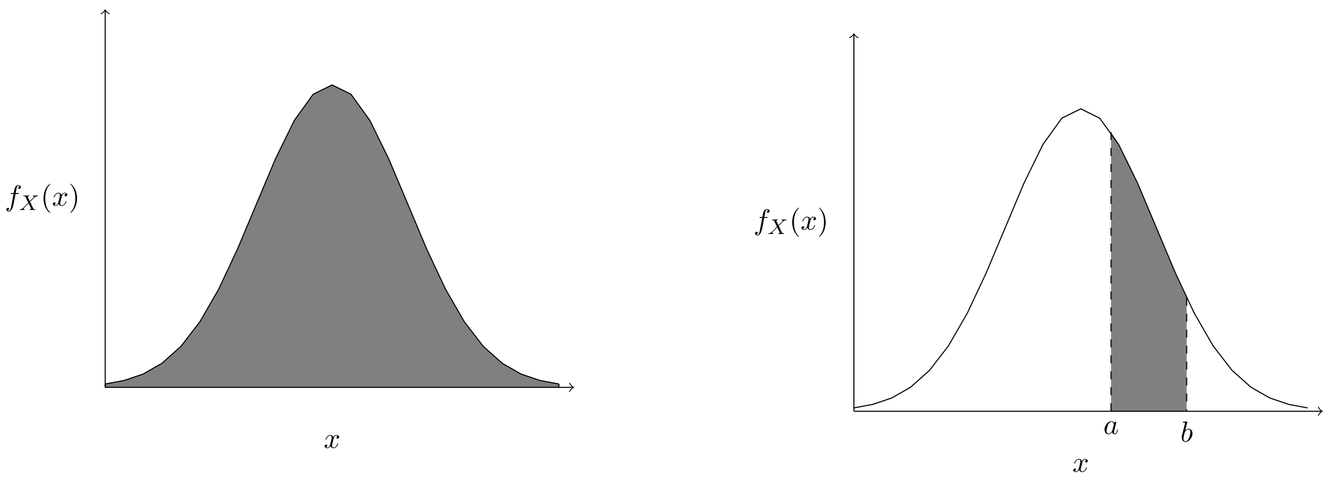
3.3.2 Função Densidade de Probabilidade

No caso de uma variável contínua não faz sentido determinar a probabilidade de cada um dos valores que a v.a. pode tomar uma vez que esta pode assumir todos os valores de um intervalo de números reais. Para qualquer que seja a variável aleatória contínua, e seja qual for o valor específico de x, $P(X = x) = 0$. Sendo assim não faz sentido falar em função massa de probabilidade.

Definição 3.3.2. *A* ***função densidade de probabilidade*** *da variável contínua X (pdf - Probability Density Function)— também designada por* função de probabilidade *— representa-se por $f(x)$ e satisfaz as seguintes condições*

1. $f(x) \geq 0$ *se* $x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ *(a área total sob o gráfico da função é igual a 1) – ver figura 3.3a*
3. $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ *sendo* $]a, b]$ *um intervalo de número reais onde a v.a. pode tomar valores.* *($P(a < X \leq b)$ é a área sob a curva limitada pelos pontos a e b) – ver figura 3.3b*

Sendo, no caso das variáveis aleatórias contínuas, $P(X = x) = 0, \quad \forall x$, podemos afirmar que $P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$, desde que $f(x)$ esteja definida em $[a, b]$.



(a) Função densidade de uma v.a. contínua (a área da região sombreada é igual a 1).

(b) Probabilidade como área $P(a \leq X < b)$

Figura 3.3: Função densidade de probabilidade

3.3.3 Função de Distribuição Acumulada

A função de densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua X permite-nos, a partir dela, e pela informação que nos dá, calcular qualquer probabilidade associada a essa variável.

Podemos também calcular probabilidades associadas a uma v.a. contínua X a partir da *função de distribuição acumulada* (CDF - Cumulative Distribution Function) — também designada por *função de distribuição.*

Definição 3.3.3. *Dada uma variável aleatória X, a* ***função de distribuição acumulada*** *de X é definida por*

$$F_X(x) = P(X \leq x),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

São válidas as seguintes propriedades: (Farias, 2009)

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$
- $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$
- $a < b \Rightarrow F_X(a) \leq F_X(b)$

Entre a função de densidade de probabilidade e a função de distribuição acumulada pode ser estabelecida uma relação que tem por base o *Teorema Fundamental do Cálculo*, que demonstra que a integração e a diferenciação são operações inversas uma da outra.

Sendo assim, por definição de função densidade de probabilidade, (3.3.2), podemos dizer que

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du \tag{3.3}$$

e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, concluímos que

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x). \tag{3.4}$$

Logo, a função de densidade de probabilidade é a *derivada* da função de distribuição acumulada (Farias, 2009).

Exemplo 3.6. *A duração, em anos, de uma certa lâmpada especial é uma variável aleatória contínua com densidade dada por*

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, \ x \ \geq \ 0 \\ 0, \ \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Qual será a probabilidade de uma destas lâmpadas durar até 18 meses?

Sendo a v.a. X = "Duração, em anos, da lâmpada", podemos obter o seu gráfico da função densidade (3.4)

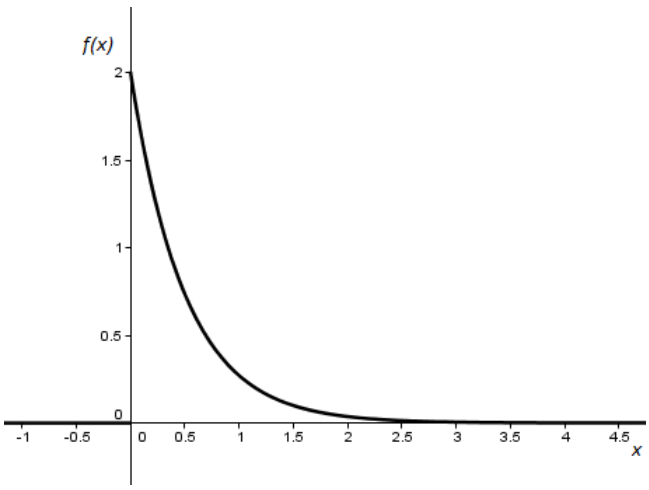


Figura 3.4: Gráfico da função densidade

Para resolver a questão colocada devemos determinar $P(X \leq 1.5)$.

Graficamente podemos calcular a área sombreada compreendida entre o gráfico da função e o eixo dos xx, entre 0 e 1.5. (ver figura 3.5)

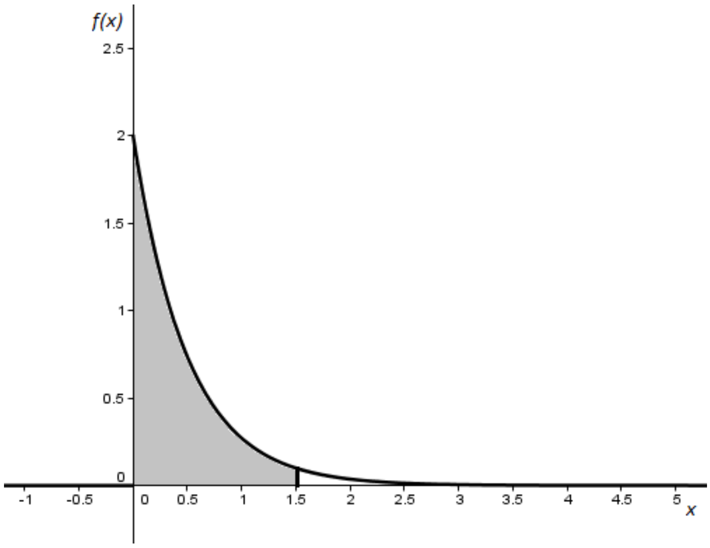


Figura 3.5: Função de distribuição acumulada - cálculo a partir da área sob a curva de densidade

No entanto, nem sempre é fácil determinar a área de uma região de forma não regular. Para isso deveremos determinar a função de distribuição acumulada $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Para isso consideremos dois casos:

- Para $x < 0$, $F_X(x) = 0$ pois a função densidade é nula nesse caso;
- Para $x \geq 0$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^x 2e^{-2x}dx = 1 - e^{-2x}$$

Para determinar a probabilidade de a lâmpada durar até 1.5 anos calculamos $F_X(x)$ no ponto 1.5 [2].

$F_X(2) = \int_0^{1.5} 2\,e^{-2\,x}\ ,dx = 1 - e^{-2x}|_0^{1.5} \approx 0.95$

Assim a probabilidade de a lâmpada durar até 1.5 anos é de, aproximadamente, 95%.

Portanto, a função de distribuição acumulada é dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, x \ < \ 0; \\ \int_0^x 2e^{-2x}dx = 1 - e^{-2x}, x \ \geq \ 0\ . \end{cases}$$

[2]Na disciplina de MACS estes cálculos realizam-se sempre com recurso às capacidades da máquina de calcular gráfica, nunca se fazendo cálculos de forma analítica.

3.4 Parâmetros de Distribuições

3.4.1 Esperança Matemática , Variância e Desvio-padrão

Parâmetro é um termo de amplo uso na matemática, na estatística e na probabilidade. O nome deriva da combinação dos termos gregos *"para"*, que significa auxiliar, e *"metron'"*, que significa medida. Assim, no contexto das distribuições de probabilidade:

Parâmetro é uma característica numérica da distribuição de probabilidade.

A parametrização de uma distribuição é um processo de abstração, que possibilita a flexibilização do seu uso. Uma distribuição parametrizada constitui uma família ou classe de distribuições, onde cada membro da classe ou família é individualizado pelos particulares valores do conjunto de parâmetros.

A cada distribuição de probabilidade podemos associar certos parâmetros que nos fornecem informações sobre a distribuição.

A **Esperança Matemática**, a **Variância**, bem como o **Desvio-padrão** são alguns dos parâmetros que sintetizam características relevantes de uma distribuição de probabilidade.

3.4.1.1 Esperança Matemática

Definição 3.4.1. *Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \cdots, x_n, \ldots$ com probabilidades $P(X = x_1) = p_1, \ldots, P(X = x_n) = p_n, \ldots$ tais que $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$.*

*A **esperança matemática** (também chamada de valor esperado ou valor médio) da v.a. X, representada por $E(X)$ ou μ_X, é definida por*

$$E(X) = \mu_X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(X = x_i).$$

Se a v.a. X tomar apenas um número finito de valores, a esperança matemática será definida por $\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$. Neste caso, a esperança matemática pode ser considerada como uma média ponderada dos valores possíveis de X, e se os valores possíveis forem igualmente prováveis, será dada pela média aritmética simples dos n valores possíveis (Estatcamp, 2014).

A média representa o centro de massa das "massas" de probabilidade colocadas sobre o eixo dos xx nos respetivos locais.

Exemplo 3.7. *Considere-se uma lotaria com 100 bilhetes e os seguintes prémios: um prémio de 100 euros, dois prémios de 20 euros e três prémios de 10 euros.*

Considera a variável aleatória X: Ganho, em euros.

Qual o valor esperado do comprador de um bilhete? *(Murteira et al., 2007)*

Neste caso este valor será dado por

$$\mu_X = E(X) = 100 \times \frac{1}{100} + 20 \times \frac{2}{100} + 10 \times \frac{3}{100} = 1.7$$

Como se verifica neste caso, o valor esperado de uma variável aleatória discreta corresponde, muitas vezes, a um ponto que não pertence ao conjunto dos valores que a variável pode assumir.

A interpretação de $E(X)$ para o caso contínuo é similar ao mencionado para as v.a. discretas, representando, neste caso, o centro de massa da função densidade de probabilidade.

Definição 3.4.2. *Seja X uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade $f_X(x)$. A esperança matemática de X é dada por:*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \ f_X(x)dx$$

Quando o integral é infinito diz-se que X não tem esperança matemática *(Vairinhos, 1996).*

Definição 3.4.3. *Seja $Y = g(X)$, sendo $g(X)$ uma v.a. uma função real de variável real e contínua na variável aleatória X. A esperança de $g(X)$, é definida como:*

1. *Se X é uma variável aleatória discreta,*

$$E\left(g(X)\right) = \sum_{x \in \mathbb{R}} g(x) f(x)$$

2. *Se X é uma variável aleatória contínua,*

$$E\left(g(X)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

Propriedade 3.2. *Dadas duas v.a. X e Y, definidas no mesmo espaço amostral Ω com valores médios $E(X)$ e $E(Y)$, e a e b duas constantes reais, então*

- $E(a) = a$

- $E(aX) = aE(X)$
- $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$
- $E(aX \pm b) = a \cdot E(X) \pm b$
- $E(aX \pm bY) = a \cdot E(X) \pm b \cdot E(Y)$

Se as v.a. são independentes, então

- $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

3.4.1.2 Variância e Desvio-padrão

Consideremos a v.a. X que representa a duração de vida de um certo tipo de lâmpadas e que $E(X) = 1000$ horas. Este valor significa que, se considerarmos um grande número de observações de X, ao calcularmos a média desses valores, ela estará próxima de 1000.

Mas este valor tem um significado relativo. Poderá querer dizer que metade das lâmpadas duraram aproximadamente 1500 horas e a outra metade apenas cerca de 500 horas. Poderá também significar que a grande maioria das lâmpadas tem uma duração entre 900 e 1100 horas.

De forma a podermos distinguir estas situações deve ser introduzida uma medida, a que chamamos *variância* e que nos permite avaliar qual a dispersão em torno da média que os valores da média patenteiam (Murteira et al., 2007).

Definição 3.4.4. *Seja X uma variável aleatória com função de probabilidade $f(x)$, com média $E(X) = \mu$, a* ***variância da variável aleatória*** *X, denotada por $Var(X) = \sigma^2$, é definida como o valor esperado da variável aleatória $(X - \mu)^2$.*

1. *Se X é uma variável aleatória discreta,*

$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_{x \in C_X} (x-\mu)^2 \, f(x), \; C_X \text{ – conjunto dos valores da v.a. } X.$$

2. *Se X é uma variável aleatória contínua,*

$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \, f(x)dx$$

É possível dispor de uma fórmula, geralmente mais operacional, para o cálculo da variância. Com efeito, notando que $(X-\mu)^2 = X^2 - 2\mu X + \mu^2$, e usando as propriedades da esperança matemática (3.2) verifica-se que

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2$$

.

Propriedade 3.3. *Dadas duas v.a. X e Y, definidas no mesmo espaço amostral Ω com valores médios $E(X)$ e $E(Y)$, e a e b duas constantes reais, então*

- $Var(a) = 0$
- $Var(aX) = a^2 Var(X)$

Se as v.a. X e Y são independentes, então

- $Var(aX \pm bY) = a^2\ Var(X) + b^2\ Var(Y)$

Definição 3.4.5. *Ao valor positivo da raiz quadrada da variância, dá-se o nome de* ***desvio-padrão***

$$\sigma = +\sqrt{Var(X)}$$

3.5 Distribuições usuais

Conhecidos os principais conceitos referentes ao cálculo das probabilidades, vamos agora apresentar alguns modelos matemáticos que representam distribuições de probabilidade usualmente utilizadas e que partem do pressuposto da existência de certas hipóteses bem definidas.

Muitas situações da vida real podem ser refletidas em variáveis aleatórias. Algumas delas seguem um comportamento previsível em relação às suas probabilidades de ocorrência que podem ser modelados por uma equação específica.

Neste capítulo abordaremos alguns desses modelos, centrando-nos apenas nos modelos discretos Binomial, Geométrico e de Poisson e no modelo contínuo Gaussiano (ou Normal). [3]

3.5.1 Modelos Discretos

Um modelo de probabilidade é discreto quando está associado a uma variável aleatória discreta.

[3] Apesar de no programa de MACS não ser indicado objetivamente quais os modelos a estudar, refere que se deve "mostrar o interesse em adotar modelos com suporte não finito em situações onde o conjunto de resultados possíveis não seja conhecido na sua totalidade ou seja demasiado extenso". (Prog. de MACS, 2001, p.23)

Existem diversas situações no nosso dia-a-dia, em que, por não ser possível determinar o maior valor de determinada variável aleatória, torna-se necessário adotar, para a estudar, modelos de suporte infinito.

De entre os modelos discretos mais vulgarmente utilizados estão o **Modelo Binomial**, o **Modelo Geométrico** e o **Modelo de Poisson**.

3.5.1.1 Modelo Binomial

Consideremos o exemplo seguinte:

Exemplo 3.8. *Um gerente de um centro comercial, mandou fazer publicidade do seu centro, na televisão, durante uma semana. Passados dias, sobre a apresentação do anúncio, os clientes eram abordados para responderem se a sua visita ao centro se devia, ou não, ao anúncio.*

(Exemplo retirado de (Martins, 2005, p.214))

Admitamos foi colocada a questão a n clientes, que as respostas que cada um dá são *independentes*, e que cada cliente tem *igual probabilidade* de responder afirmativamente à questão. As respostas apenas podem tomar dois valores: *sim* ou *não*, sendo que será considerado "sucesso" a resposta afirmativa e "insucesso" a resposta negativa.

Experiências aleatórias desta natureza são constituídas por um número fixo, n, de provas independentes e em que, em cada prova, apenas se podem verificar um de dois resultados possíveis: A que se designa por *sucesso* e $\overline{A}$ que se designa por *insucesso*, sendo p a probabilidade de sucesso e $1-p$ a probabilidade de insucesso. Cada uma destas provas designa-se por **Prova** ou **experiência de Bernoulli**.

Exemplo 3.9. *Numa fábrica de confeções, estima-se que 2% das peças saem com defeito. Analisou-se um lote constituído por 30 peças. Qual é a probabilidade de:*

1. *As peças estejam todas boas?*

2. *Haja mais do que uma peça com defeito? (2 c.d.)*

(Exemplo retirado de (Longo & Branco, 2011, p.174))

A experiência aleatória associada a esta situação obedece às seguintes condições:

- a experiência consiste na repetição de n provas idênticas — (análise de 30 peças);

- cada prova tem dois resultados possíveis: sucesso ou insucesso — (A: "ter defeito" e $\overline{A}$: "não ter defeito");

- a probabilidade de sucesso mantém-se constante de prova para prova e igual a p — (neste caso $p(A) = 0.02$);

- as provas são independentes;

- a v.a. "número de sucessos observados ao fim de n provas", toma os valores $0, 1, 2, \cdots, n$.

Assim, esta experiência aleatória diz-se uma **experiência binomial** e a variável de interesse traduz o número de sucessos observados no conjunto das n provas de Bernoulli.

Definição 3.5.1. *A função massa de probabilidade do* ***Modelo Binomial*** *é dada por:*

$$f(x) = P(X = k) = C_k^n \; p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

O valor esperado e a variância são respetivamente:

$$\mu = E(X) = n \cdot p \qquad e \qquad \sigma^2 = Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Abreviadamente, diz-se então que $X \sim Bin(n, p)$ (X segue uma distribuição binomial de parâmetros n e p)[4].

Para responder às questões colocadas no exemplo 3.9 vamos começar por considerar o acontecimento A: *"a peça tem defeito"* e a v.a. X: *"número de peças com defeito, no lote de 30 peças"*. Nas condições do enunciado, X tem distribuição Binomial de parâmetros $n = 30$ e $p = 0.02$.

1. $P(X = 0) = \dfrac{30!}{0!(30-0)!} \cdot 0.02^0 \cdot (1-0.02)^{30-0} = 0.98^{30} \approx 0.55$.

2. $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(X > 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(X > 1) = 1 - \left[\dfrac{30!}{0!(30-0)!} \cdot 0.02^0 \cdot (1-0.02)^{30-0} + \dfrac{30!}{1!(30-1)!} \cdot 0.02^1 \cdot (1-0.02)^{30-1}\right] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(X > 1) = 1 - \left(0.98^{30} + 30 \cdot 0.02 \cdot 0.98^{29}\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(X > 1) \approx 0.12$

[4]Na disciplina de MACS não se justifica o estudo de modelos para situações que obriguem a utilizar técnicas de contagem que envolvam cálculo combinatório. O cálculo de C_k^n é feito de forma empírica.

3.5.1.2 Modelo Geométrico

O modelo geométrico utiliza-se quando queremos saber qual é a probabilidade de que um determinado acontecimento, mais concretamente o primeiro sucesso, se realizar ao fim de k experiências de Bernoulli. Significa isto que, para haver sucesso ao fim de k experiências, já houve $k-1$ insucessos (Longo & Branco, 2011).

Consideremos uma sequência ilimitada de provas independentes de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p em cada prova.

Se designarmos por S um sucesso e por um I um insucesso, e repetirmos as provas até obter sucesso obtemos o espaço amostral

$$\{S, IS, IIS, IIIS, IIIIS, \ldots\}$$

Nesta distribuição podemos considerar dois critérios. Um deles é o de contar o número de experiências até obter sucesso e outra é o de contar o número de falhas antes do primeiro sucesso.

No primeiro caso não podemos incluir o zero como sendo um possível resultado uma vez que não podemos ter sucesso ser realizar qualquer ensaio.

No segundo caso podemos incluir o zero pois, se obtivermos sucesso logo no primeiro ensaio, significa que não houve qualquer falha até ao primeiro sucesso.

Definição 3.5.2. *A função massa de probabilidade do **Modelo Geométrico** é dada por:*

$$f(x) = P(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, \quad k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

onde p é a probabilidade de ter sucesso, $1-p$ é a probabilidade de ter insucesso, X é a variável aleatória associada à experiência (neste caso de "contar o número de experiências até obter sucesso") e k o número da experiência onde ocorre o sucesso. O valor esperado e a variância são respetivamente:

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p} \qquad e \qquad \sigma^2 = Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Abreviadamente, diz-se então que $X \sim Geo(p)$ (X segue uma distribuição geométrica de parâmetro p)

Exemplo 3.10. *O Duarte vai posicionar-se na linha de lançamento livre num campo de basquetebol e atirar até fazer um cesto. Se admitirmos que os lançamentos são independentes e de probabilidade de acertar constante e igual a 0.8, determina:*

1. *a probabilidade de acertar no terceiro lançamento;*

2. *a probabilidade de necessitar de menos de 5 lançamentos para acertar;*

3. o número esperado de lançamentos que tem que efetuar para acertar.

Exercício adaptado de (Inst. Sup. de Agronomia, Departamento de Matemática, 2006)

Sabemos que, se a probabilidade de acertar é constante e igual a 0.8, a probabilidade de falhar também é constante e igual a 0.2. Consideremos a v.a. X que conta o número de lançamentos até encestar pela primeira vez. X tem distribuição Geométrica de parâmetro $p = 0.8$.

Então:

- Queremos saber $P(X = 3)$

  Se o Duarte acertou no terceiro lançamento significa que falhou os dois primeiros.

  Assim:

  $$P(X = 3) = 0.2^2 \cdot 0.8 = 0.032$$

- Neste caso a probabilidade de necessitar de menos de 5 lançamentos para acertar é dada por

  $P(X < 5) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow P(X < 5) = 0.2^0 \cdot 0.8 + 0.2^1 \cdot 0.8 + 0.2^2 \cdot 0.8 + 0.2^3 \cdot 0.8 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow P(X < 5) = 0.99968$

- O número esperado de lançamentos que tem de efetuar até acertar é dado por

  $$\mu = E(X) = \frac{1}{0.8} = 1.25$$

3.5.1.3 Modelo de Poisson

O **Modelo de Poisson** adapta-se a variáveis que representam o número de vezes que determinado fenómeno ocorre num dado período de tempo ou região do espaço.

São exemplo de fenómenos aos quais se pode aplicar o modelo de Poisson, o número de:

- chegadas de clientes a uma bilheteira durante um certo período de tempo;

- doentes na urgência de um hospital durante um fim-de-semana;

- visualizações de um *site* da Internet durante uma hora;

- bactérias coliformes num depósito de água;

- erros tipográficos por página.

Muitos destes fenómenos podem ser vistos como uma grande quantidade de acontecimentos separados e distintos ocorrendo em relação a um espaço de acontecimentos contínuos.

Quer estes fenómenos ocorram ao longo do tempo, quer ocorram em regiões do espaço, é possível sempre associar um processo de contagem. A descrição rigorosa deste tipo de processos (estocásticos) está fora do âmbito desta dissertação e iremos apenas apresentar de forma simplificada a noção de Processo de Poisson. Assim, segundo Murteira et al. (2007), tem-se:

Definição 3.5.3. *Suponha-se que se procede à contagem do número de acontecimentos ocorridos ao longo do tempo. Tem-se um* ***Processo de Poisson*** *com parâmetro $\lambda > 0$ desde que as seguintes condições sejam cumpridas:*

1. *O número de acontecimentos que ocorrem em dois intervalos disjuntos são independentes;*
2. *A probabilidade de ocorrer exatamente um evento em qualquer intervalo de amplitude Δt arbitrariamente pequena é aproximadamente $\lambda\Delta t$;*
3. *A probabilidade de ocorrerem dois ou mais acontecimentos em qualquer intervalo de amplitude Δt arbitrariamente pequena é aproximadamente igual a zero.*

Definição 3.5.4. *A função massa de probabilidade do* ***Modelo de Poisson****, para uma variável aleatória discreta, X, é dada por:*

$$f(x) = P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!},\ k \in \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

sendo "e" o número de Neper e λ um parâmetro (positivo). Para este modelo, o valor esperado e a variância são iguais ao parâmetro λ, isto é:

$$\mu = E(X) = \lambda \qquad \sigma^2 = Var(X) = \lambda$$

Abreviadamente, diz-se então que $X \sim Po(\lambda)$ (X segue uma distribuição de Poisson de parâmetro λ) (Longo & Branco, 2011)

Se os acontecimentos num processo de Poisson ocorrem a uma taxa média de λ , por unidade de tempo, então o número de ocorrências num intervalo de amplitude t, representado pela variável aleatória X , tem distribuição de Poisson de parâmetro λt,

$$f(x) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^x}{x!}, \quad x \in \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Podemos concluir que um número esperado de ocorrências num intervalo de tempo de amplitude t é λt (Murteira et al., 2007).

Por exemplo, se o número de clientes que chegam a uma caixa de pagamento de supermercado, num período de 15 minutos, é uma v.a., de valor médio 5, a que se pode aplicar o modelo de Poisson, o número esperado de clientes, num período de 2 horas é 40 e a sua distribuição segue também o modelo de Poisson, agora com parâmetro 40.

Exemplo 3.11. *O João e o André fizeram um trabalho de grupo com 96 páginas. Ao corrigir, o professor detetou 24 erros ortográficos. Sabendo que os erros se distribuem aleatoriamente pelo trabalho e que o número de erros por página pode ser representado por um modelo de Poisson, calcula a probabilidade de que:*

1. *uma página escolhida ao acaso não tenha qualquer erro;*
2. *uma página escolhida ao acaso tenha, no máximo, dois erros;*
3. *uma página escolhida ao acaso tenha mais de dois erros;*
4. *doze páginas escolhida ao acaso não tenham erros.*

Exercício retirado de (Longo & Branco, 2011, p.144)

Estamos perante uma situação à qual se adapta um modelo de Poisson.

Para poder responder às questões colocadas devemos começar por determinar o valor esperado da variável X que contabiliza o número de erros numa página.

Como o trabalho tem 96 páginas e um total de 24 erros podemos afirmar que o número médio de erros por página é de:

$$E(X) = \lambda = \frac{24}{96} = 0.25$$

Assim, o modelo de Poisson a utilizar é

$$P(X = k) = e^{-0.25} \cdot \frac{(0.25)^k}{k!}$$

Então

- a probabilidade de *uma página escolhida ao acaso, não ter qualquer erro* é

$$P(X = 0) = e^{-0.25} \cdot \frac{(0.25)^0}{0!} = e^{-0.25} \approx 0.779$$

ou seja, a probabilidade de *a página escolhida ao acaso não ter erros* é de aproximadamente 77.9%.

- *uma página escolhida ao acaso tenha, no máximo, dois erros* significa que a página poderá ter um número de erros inferior ou igual a 2, $P(X \leq 2)$

$$\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow P(X \leq 2) &= e^{-0.25} \cdot \frac{(0.25)^0}{0!} + e^{-0.25} \cdot \frac{(0.25)^1}{1!} + e^{-0.25} \cdot \frac{(0.25)^2}{2!} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow P(X \leq 2) &= e^{-0.25} + 0.25 \cdot e^{-0.25} + 0.03125 \cdot e^{-0.25} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow P(X \leq 2) &\approx 0.779 + 0.195 + 0.024 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow P(X \leq 2) &\approx 0.998
\end{aligned}$$

  a probabilidade de *a página escolhida ao acaso ter, no máximo, dois erros* é de aproximadamente 99.8%.

- *uma página escolhida ao acaso tenha mais de dois erros*, $(X > 2)$, pode ser considerado o acontecimento contrário de *a página ter no máximo dois erros.* Sendo assim basta determinar:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.998 = 0.002$$

  a probabilidade de *a página escolhida ao acaso ter mais de dois erros* é de aproximadamente 0.2%.

- Se o número médio de erros por página é 0.25 ($\lambda = 0.25$), em doze páginas, é esperado um número de erros médio de 3 ($12 \times 0.25 = 3$).

  Assim o modelo de Poisson adequado a esta nova situação é

$$P(X = k) = e^{-3} \cdot \frac{(3)^k}{k!}$$

  A probabilidade de que nessas *doze páginas não haja erros* é dada por

$$P(X = 0) = e^{-3} \cdot \frac{(3)^0}{0!} = e^{-3} \approx 0.05$$

  isto é, aproximadamente 5%.

3.5.2 Modelos Contínuos

Um modelo de probabilidade é contínuo quando está associado a uma variável aleatória contínua.

Existem várias distribuições contínuas que surgem de processos físicos e que nos interessam do ponto de vista experimental. Entre estas, as mais usuais e simples de tratar matematicamente são as distribuições *uniforme*, *exponencial*, *gama* e *normal.* (Fernandes, 1999)

No programa de MACS refere-se apenas o **modelo Normal**, de entre os modelos contínuos usuais.

3.5.2.1 Modelo Normal

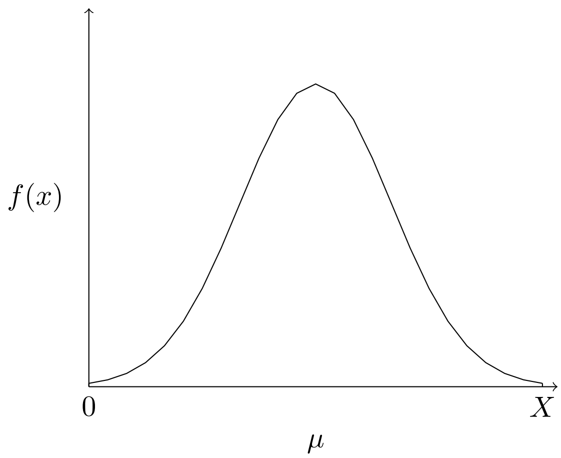
O modelo normal é um dos modelos mais utilizados, revelando-se de extrema importância pois, qualquer que seja o tipo de distribuição em análise, para grandes amostras, as suas médias são aproximadamente normalmente distribuídas e, à medida que o tamanho da amostra aumenta, tenderão para uma distribuição normal (**Teorema do Limite Central**).

Definição 3.5.5. *Uma variável aleatória X, com função densidade de probabilidade:*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma \in \mathbb{R}^+$$

diz-se que tem ***distribuição Normal****, com parâmetros μ e σ (respetivamente valor médio e desvio-padrão) e escreve-se simbolicamente por $X \sim N(\mu, \sigma)$.*

Esquematicamente, esta distribuição tem uma curva em forma de sino, (também denominada **Curva de Gauss**), é simétrica em relação à média, a que corresponde o ponto valor máximo da curva e fica completamente definida pelos parâmetros μ e σ. A área total sob a curva é igual a 1.



A cada par (μ, σ) corresponde uma curva normal com características diferentes.

Quanto maior for o desvio-padrão mais achatada é a curva uma vez que maior é a dispersão em torno do valor médio μ mas a área total mantém-se igual a 1. No caso apresentado na figura 3.7, temos $\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1$.

Em qualquer curva normal, isto é, dada uma variável aleatória X com uma distribuição normal de parâmetros μ e σ, podemos determinar a área sob a curva entre dois valores específicos da variável utilizando algumas áreas importantes:

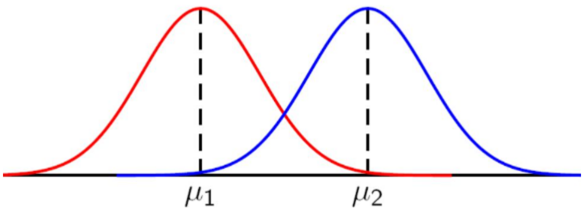


Figura 3.6: Representação, no mesmo referencial, de duas curvas normais com igual desvio-padrão mas diferentes valores médios, μ_1 e μ_2

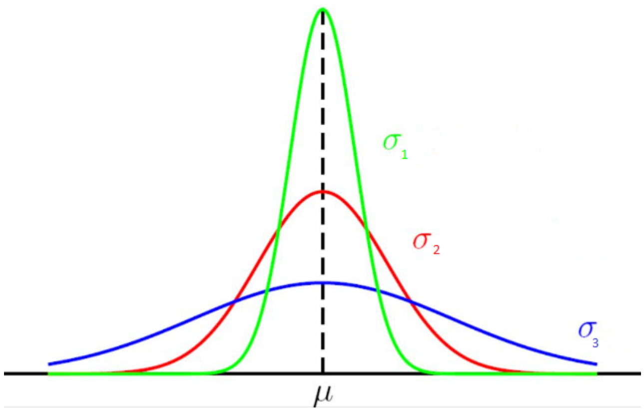


Figura 3.7: Representação, no mesmo referencial, de três curvas normais com igual valor médio mas diferentes desvios-padrão

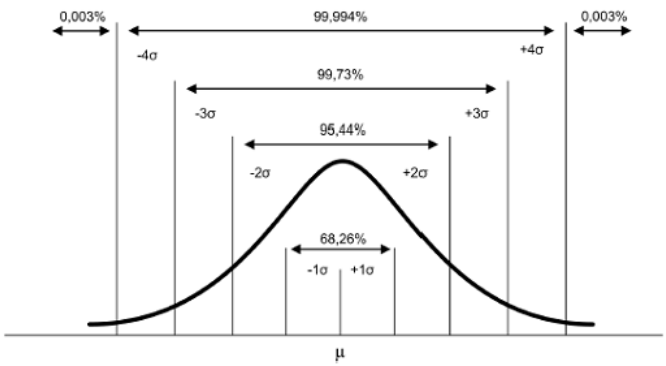


Figura 3.8: Áreas importantes sob a curva normal

Como em qualquer função densidade, a área situada abaixo da curva é sempre igual a 1.

Em qualquer curva normal tem-se:

- $P(X \in]\mu - \sigma, \mu + \sigma[) \approx 68.27\%$
- $P(X \in]\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma[) \approx 95.45\%$
- $P(X \in]\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma[) \approx 99.73\%$

Na disciplina de MACS para calcular as probabilidades referentes à distribuição normal, utiliza--se sempre que possível estes valores. Caso contrário recorre-se à máquina de calcular gráfica.

Como diz o próprio programa da disciplina "os alunos devem recorrer à tecnologia (calculadoras gráficas ou computadores) para estudar as famílias de funções que forem encontrando e simular variações de dados nos modelos analisados." (Prog. de MACS, 2001, p.20)

Exemplo 3.12. *Depois de corrigir os testes de Português dos seus 28 alunos do 11.º ano, o professor Amador Paulino concluiu que a distribuição dos resultados era aproximadamente normal, com um valor médio* $\mu = 13.5$ *valores e um desvio-padrão* $\sigma = 2.5$ *valores.*

1. *Calcula a probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, ter uma classificação:*

    (a) *superior a 13.5 valores;*

    (b) *entre 11 e 16 valores.*

2. *De acordo com o modelo Normal, quantos alunos se espera que tenham tido classificação:*

    (a) *superior a 6 valores?*

    (b) *entre 8.5 e 16 valores?*

Exercício adaptado do manual de MACS (Longo & Branco, 2011, p.158)

Como se trata de uma situação em que os resultados se distribuem de uma forma normal, basta calcular a área, sob a curva, correspondente ao intervalo pedido.

Comecemos por designar por X a "classificação obtida no teste de Português"

Assim, como 13.5 é o valor médio

$$P(X > 13.5) = 50\%$$

No segundo item da primeira questão pretendemos determinar $P(11 < X < 16)$

Ora, como $\mu = 13.5$ e $\sigma = 2.5$,

$$]\mu - \sigma, \mu + \sigma[=]13.5 - 2.5, 13.5 + 2.5[=]11, 16[$$

podemos dizer que $P(11 < X < 16) \approx 68.27\%$

Para responder à segunda questão teremos de após calcular o valor da probabilidade, o multiplicar pelo número total de alunos.

Comecemos por determinar $P(X > 6)$

Ora, $\mu - 3\sigma = 6$, logo podemos dizer que

$$P(X > 6) \approx 100\% - \frac{100\% - 99.73\%}{2} \approx 99.865\%$$

Como $99.865\% \times 28 = 27.9622 \approx 28$, podemos dizer que se espera que todos os alunos tenham tido nota superior a 6.

Para responder ao segundo item da segunda questão, determinar $P(8.5 < X < 16)$, devemos verificar que

$\mu - 2\sigma = 8.5$ e que $\mu + \sigma = 16$

Assim

$$P(8.5 < X < 16) \approx 100\% - \frac{100\% - 95.45\%}{2} - \frac{100\% - 68.27\%}{2} \approx 100\% - 2.275\% - 15.865\% = 81.86\%$$

Como $81.86\% \times 28 = 22.9208 \approx 23$, podemos dizer que se espera que 23 alunos tenham nota entre 8.5 e 16 valores.

Capítulo 4

Implementação do *software*

4.1 *Sage Mathematics*

No âmbito do desenvolvimento de aplicações para a Matemática pode recorrer-se a diferentes *softwares* com interesse específico para o ensino e aprendizagem das diversas áreas temáticas que a compõe.

Assim, existe disponível uma panóplia de *softwares* que se podem utilizar para efeitos de produção de recursos como seja para a geometria, a álgebra, funções, matemática recreativa, entre muitos outros. De facto existe uma grande disponibilidade de *softwares* matemáticos para utilização online, o que torna fundamental verificar se um determinado *software* serve, ou não, para desenvolver determinado conteúdo e se está indicado para ser utilizado em ambientes e contextos educativos.
Para efeito desta dissertação, e dado reunir as condições exigidas, necessárias e fundamentais para o desenvolvimento do trabalho de aplicação que se pretende executar optou-se pela utilização da plataforma *Sage Mathematics*.
De acordo com Cruz et al. (2013) "o objetivo é disponibilizar em rede, quer para professores quer para alunos, um vasto conjunto de exercícios que permita aos alunos aferir os seus conhecimentos e aos professores dê liberdade para investir noutro tipo de problemas e numa preparação de aulas mais eficiente, nomeadamente na criação de mais exercícios ou problemas, textos de apoio e outros meios que implementem o sucesso da aprendizagem". Uma vez que a plataforma *Sage Mathematics* é um *software* para matemática que abrange computação algébrica, numérica e tem capacidades gráficas, significa que permite a utilização de um sistema de computação para matemática com potencial de suporte para os exercícios propostos no âmbito desta dissertação a serem disponibilizados aos alunos.

4.2 MEGUA

[1] Na área do ensino existem disponíveis diversos *softwares* educativos sendo estes classificados de acordo com a forma como o conhecimento é manipulado. As categorias mais comuns são os tutoriais, exercício e prática, jogos e simulação.

O *software* do tipo exercício e prática é um *software* que utiliza perguntas e respostas, normalmente utilizadas para realizar uma revisão de matérias já estudadas.

Existem diversos pacotes de *software*, na área da Matemática, que permitem a construção de exercícios e a apresentação da respetiva resolução, sendo estes tipicamente pagos e normalmente orientados para a língua inglesa. Nesta dissertação a opção recaiu sobre um pacote de *software* para o *Sage Mathematics*, designado por MEGUA, em desenvolvimento na Universidade de Aveiro, que pretende ser uma ferramenta livre e com conteúdos mais vocacionados para a língua portuguesa.

O MEGUA é, então, uma biblioteca de *software open source* que permite gerar automaticamente exercícios completos na linguagem tipográfica LaTeX, com apresentação dos respetivos resultados, possibilitando, desta forma, a conceção de um sistema de ensino assistido por computador, recorrendo à linguagem de programação Python. Assim, segundo Cruz et al. (2013), "MEGUA é um sistema que permite a criação de bases de dados de exercícios parametrizados, e respetivas resoluções, em que estes são criados por professores, usando a experiência adquirida ao longo dos anos de lecionação. A geração de novos exercícios ocorre por substituição automática, eventualmente aleatória, de parâmetros por valores numéricos ou funções, extraídos de conjuntos pré-definidos. Este projeto está a ser construído sobre a plataforma *Sage Mathematics*". Cada elemento da base de dados do MEGUA é considerado como objeto de aprendizagem, que pode ser reutilizado em diversos contextos, sejam apenas como meras folhas de exercícios, jogos, testes, fichas de auto-diagnóstico, etc. (Cruz et al., 2011).

Nesta dissertação os recursos digitais construídos foram desenvolvidos, especialmente, com as denominadas perguntas de escolha múltipla. Estas perguntas, segundo Pinto, A. C. (2001) servem fundamentalmente para avaliar os conhecimentos teóricos e os saberes de natureza declarativa. De acordo, ainda, com este autor a avaliação do conhecimento escolar, ou outros conhecimentos de índole geral, por meio de perguntas de escolha múltipla é cada vez mais frequente e popular entre os docentes, alunos e instituições. Grande parte desta popularidade entre os docentes advém da facilidade de correção, para os alunos da eliminação da subjetividade de correção reduzindo

[1] As secções **4.2** e **4.3** foram realizadas em parceria com a aluna de mestrado em Matemática para Professores, Ester de Lemos, na dissertação *Recursos Digitais de Apoio ao Ensino em Organização e Tratamento de Dados (2.º e 3.º Ciclos*, apresentada na Universidade de Aveiro em 5 de dezembro de 2014

substancialmente o poder discricionário dos docentes, para as instituições pelos ganhos económicos substanciais que a sua aplicação apresenta quando está em causa a avaliação de milhares de alunos.

4.2.1 Como criar um exercício

Para criar um exercício usando o *Sage Mathematics* e o pacote MEGUA devemos criar uma *"worksheet"* que deverá conter a informação que consta na tabela:

De seguida, de acordo com a tabela 4.1, especifica-se cada passo da criação de um exercício.

1. Esta instrução carrega o pacote MEGUA e as suas funções.
2. É aberta a base de dados que contém os exercícios criados em que *meg* passa a especificar essa base de dados.
3. Vai iniciar o exercício, esta instrução grava o exercício descrito entre *(r ' ' '* e *' ' ')*.
   (a) Faz-se uma breve descrição do problema, podendo usar palavras-chave.
   (b) Atribui-se um título sugestivo ao problema e descreve-se o seu enunciado.
   (c) O bloco de escolha múltipla tem sempre a sintaxe supraindicada, com quatro opções de resposta, em que a primeira é sempre a única correta.

   De seguida aparece a resposta correta e apresenta-se uma resolução pormenorizada do problema.
   (d) O nome da classe é o nome do exercício E97F50_AAAA_001 em que E97F50 designa o código MSC (*Mathematical Subject Classification*) mais apropriado para o exercício.
   (e) A função *make_random* é usada para declarar os parâmetros que ocorrem no texto na parte do enunciado do problema.
   (f) A função *solve* é onde os parâmetros que ocorrem na parte da resposta tomam valores calculados com base nos parâmetros escolhidos na parte do problema.

Deve salientar-se que os textos referentes a *%summary*, *%problem* e *%answer* estão escritos em linguagem tipográfica LaTeX.

A produção de valores referentes a *make_random* e *solve* é realizada com base na programação em *Python/Sagemath*.

s.v1 e *s.v2* são chamados de parâmetros em que *v1* e *v2* ocorrem no texto. O *s.* designa que os parâmetros pertencem ao exercício.

Na criação de exercícios, por vezes, pode ser necessária a criação de objetos gráficos, como função dos parâmetros que os caracterizam. Para tal pode usar-se as potencialidades do LaTeX, do HTML

1. from megua.all import *
2. meg = MegBookWeb("/home/nbuser/mp2013web.sqlite")
3. meg.save(r ' ' '
   (a) %summary
   (b) %problem
   (c) %answer
   <multiplechoice>
   <choice> $vresposta$ </choice>
   <choice> $errada1$ </choice>
   <choice> $errada2$ </choice>
   <choice> $errada3$ </choice>
   </multiplechoice>
   A resposta é $vresposta$
   (d) class E97K50_AAAA_001(Exercise):
   (e) def make_random(s):
   $s.v1 =$
   $s.v2 =$
   (f) def solve(s): $s.vresposta =$
   #Opções Erradas
   $s.errada1 =$
   $s.errada2 =$
   $s.errada3 =$

   ' ' ')

Tabela 4.1: Como criar um exercício

ou os pacotes gráficos especializados como o é o caso do Tikz. Este último pode ser também usado na exportação de gráficos construídos no Geogebra.

O resultado de cada exercício é um ficheiro *html* que pode ser visualizado com um *shift+enter* na primeira vez e com tecla *F5* para posteriores atualizações.

4.3 SIACUA

O SIACUA (Sistema Interativo de Aprendizagem por Computador, Universidade de Aveiro)

http://siacua.web.ua.pt/

é uma aplicação criada no âmbito da investigação e em desenvolvimento na Universidade de Aveiro.

A aplicação foi originalmente desenhada e criada pelos docentes Luís Descalço e Paula Carvalho como uma aplicação para os exercícios desenvolvidos no MEGUA.

Atualmente é composto por cinco cursos, *Cálculo 1*, *Cálculo 2*, *Cálculo 3*, *Matemática - Secundário* e *Matemática - Básico*, permitindo, no entanto, a criação de novos cursos.

Para cada curso existe um índice com informações e exercícios sobre o assunto e uma área de estudo autónomo que, sendo um sistema de aprendizagem aberto, permite a cada utilizador ter acesso ao seu progresso.

O utilizador pode optar por selecionar um tópico, fazendo aparecer um exercício ou escolher um exercício através do seu ID. Os exercícios podem ser do tipo escolha múltipla (usadas nomeadamente no projeto MEGUA) ou do tipo verdadeiro/falso (usadas por exemplo, no PmatE - Projeto Matemática Ensino).

Com a possibilidade de os alunos terem acesso a um mapa conceptual sobre o assunto em estudo, com informações atualizadas sobre cada evidência de conhecimento (ou desconhecimento) adquirida, a utilização do sistema SIACUA incentiva-os a estudar autonomamente, testando os resultados da sua aprendizagem através da resolução de questões sobre a matéria geradas aleatoriamente.

Os exercícios idealizados no âmbito da componente prática (construção dos exercícios) desta dissertação, serão alojados no supramencionado sistema, no Curso *Matemática - Secundário*.

Cada exercício criado é enviado para o SIACUA seguindo os seguintes procedimentos:

1. No *"worksheet"* insere-se uma nova célula onde se escreve a seguinte instrução:

```
meg.siacua(exname="E97k50_AAAA_001",ekeys=[0,1,15,20,25,30,40,50,100,120],sendpost
=true,course="matsec",usernamesiacua="aaaaa")
```

2. Imediatamente antes de *%problem* é colocada a informação seguinte:

   SIACUAstart

   level=1

   slip=0.2

guess=0.25

discr=0.3

concepts = [(*"código SIACUA"*, *peso*)]

SIACUAend

Nota: Os códigos SIACUA atribuídos ao tema probabilidades são os seguintes: Probabilidades (4730); Espaços de Probabilidades (4731); Probabilidade Condicionada (4732); Parâmetros - valor médio, variância (4733); Modelos discretos (4734) e Modelos contínuos (4735).

3. Voltar à célula criada e fazer *shift+enter*

Após a realização destas etapas, automaticamente, os exercícios gerados ficam disponibilizados no SIACUA.

A seleção das chaves (*ekeys*) deve ser realizada tendo em atenção que cada uma das chaves gerará um exercício diferente e que estes cobrirão a maioria dos casos possíveis na resolução do mesmo.

4.4 Exercícios Criados

Nesta secção, para cada um dos exercícios parametrizados criados, apresenta-se uma concretização do enunciado do exercício, uma hipótese de resolução bem como uma breve descrição do mesmo, salientando sempre que oportuno alguns aspetos, tais como: o seu grau de dificuldade para o aluno, as variáveis que foram implementadas na parte da programação, os desafios/dificuldades que foi necessário superar e quais as opções tomadas na definição das respostas erradas.

Em relação às respostas erradas tentou-se, genericamente, eliminar em termos matemáticos respostas iguais e a diversidade destas respostas foi ao encontro das possíveis respostas erradas mais comuns em cada situação. O código fonte relativo a cada exercício pode ser consultado no Apêndice A e em cada exercício está indicado o número da página do respetivo apêndice. A base de dados de exercícios, que foi criada, pretende abranger a maioria dos conteúdos relativos ao tema "Probabilidades" lecionados na disciplina de MACS.

Exercício **E97K50_DefAxiomatica_001** (ver código fonte na pág. 125):

Este exercício trabalha a probabilidade da reunião de dois acontecimentos quaisquer.

Foram parametrizadas as variáveis correspondentes aos valores que podem assumir $P(A)$ e $P(A \cup B)$. Assim, foi definido que $P(A)$ podia tomar valores compreendidos entre 5% e 30%. O valor que $P(A \cup B)$ toma é igual à diferença entre 80% e o valor de $P(A)$.

Neste construção deste exercício não surgiram dificuldades, sendo o seu nível de dificuldade, para os alunos, fácil.

Enunciado:

Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que

$$P(A) = 13\%$$

$$P(A \cup B) = 67\%$$

A e B são incompatíveis

Qual o valor de P(B)?

- ☐ 54%
- ☐ 13%
- ☐ 67%
- ☐ 80%

Proposta de resolução:

Se os acontecimentos A e B são incompatíveis então a probabilidade da reunião de A com B é igual à soma das probabilidades de A e B, isto é:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

. Como:

$$P(A \cup B) = 67\% \qquad e \qquad P(A) = 13\%$$

temos

$$67\% = 13\% + P(B) \Leftrightarrow P(B) = 67\% - 13\% \Leftrightarrow P(B) = 54\%.$$

Exercício **E97K50_DefAxiomatica_002** (ver código fonte na pág. 127):

Este exercício trabalha a definição axiomática de Probabilidade e as suas propriedades.

Foram parametrizadas todas as variáveis apresentadas no enunciado. Para $P(A)$ e $P(B)$ foi definido que os seus valores podiam tomar valores reais, com duas casas decimais, pertencentes aos intervalos $[0.2; 0.6]$ e $[0.1; 0.5]$ respetivamente.

A maior dificuldade, a nível matemático, na concretização deste exercício foi conseguir parametrizar a variável correspondente a $P(\overline{A} \cup B)$ de forma a garantir que os valores assumidos eram possíveis.

O nível de dificuldade deste exercício, para os alunos, é médio.

Enunciado:

Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:

$$P(A) = 0.54$$

$$P(B) = 0.28$$

$$P(\overline{A} \cup B) = 0.61$$

Qual é o valor de $P(A \cup \overline{B})$?

- ☐ 0.87
- ☐ -0.87
- ☐ 1.43
- ☐ 0.61

Proposta de resolução:

A resposta é 0.87. A probabilidade da reunião de dois acontecimentos é dada por $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Neste caso podemos dizer que $P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B})$. Sabemos também, pela propriedade da probabilidade do acontecimento contrário que:

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B)$$

Neste caso:

$$P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) =$$

$$= P(A) + (1 - P(B)) - P(A \cap \overline{B}) =$$

$$= 0.54 + (1 - 0.28) - P(A \cap \overline{B}) =$$

$$= 1.26 - P(A \cap \overline{B})$$

Mas $P(A \cap \overline{B}) = 1 - P(\overline{A \cap \overline{B}}) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) = 1 - P(\overline{A} \cup B) = 1 - 0.61 = 0.39$. Assim:

$$P(A \cup \overline{B}) = 1.26 - 0.39 = 0.87$$

Exercício **E97K50_DefAxiomatica_003** (ver código fonte na pág. 130):

Este exercício trabalha a probabilidade da reunião de dois acontecimentos quaisquer.

Foram parametrizados os valores das variáveis que podem tomar $P(A)$ e $P(B)$. Assim, foi definido que $P(A)$ poderia tomar valores reais do intervalo $[0.2, 0.6]$ e $P(B)$ poderia tomar valores reais do intervalo $[0.1, 0.5]$.

A maior dificuldade, a nível matemático, na concretização deste exercício foi conseguir definir as respostas erradas garantindo que qualquer uma delas ficasse fora do intervalo admitido para $P(A \cup B)$.

O nível de dificuldade deste exercício, para os alunos, é difícil.

Enunciado:

Considera dois acontecimentos A e B com probabilidades $P(A) = 0.2$ e $P(B) = 0.43$. De entre os valores seguintes o único que pode traduzir a probabilidade da reunião $P(A \cup B)$ é:

- □ 0.55
- □ 0.05
- □ 0.89
- □ 0.34

Proposta de resolução:

A resposta é 0.55. A probabilidade da reunião de dois acontecimentos é dada por $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Esta probabilidade está sempre compreendida entre os seguintes valores:

$$\max(P(A), P(B)) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

Neste caso

$$\max(0.2, 0.43) \leq P(A \cup B) \leq 0.2 + 0.43 \quad \Leftrightarrow$$

$$0.43 \leq P(A \cup B) \leq 0.63.$$

O único valor compreendido neste intervalo é 0.55.

Exercício **E97K50_Laplace_001** (ver código fonte na pág. 132):

Este exercício trabalha o cálculo de probabilidade, usando a regra de Laplace e uma tabela de dupla entrada para representar todos os resultados possíveis.

Foram parametrizadas as variáveis respeitantes à quantidade de bolas existentes na caixa e consequentemente, ao número até qual elas estão numeradas, podendo tomar valores inteiros entre 6 e 10. Também o número que surge na colocação da questão é uma variável parametrizada podendo tomar como valor mínimo 2 e como valor máximo igual ao número de bolas existentes na caixa.

O maior desafio na construção deste exercício foi, em termos de programação, a construção da tabela dinâmica. O número de linhas tem de corresponder à numeração das bolas e a tabela tem de ser preenchida com os pares ordenados respetivos. A contagem do número de casos favoráveis exigiu também uma função de programação adequada.

O nível de dificuldade deste exercício, para os alunos, é fácil.

Enunciado:

Considera uma caixa com 6 bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 6. Considera também um dado equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6. Lança-se o dado e tira-se, ao acaso, uma bola da caixa. Qual é a probabilidade de os números saídos serem ambos menores que 4?

- ☐ 0.25
- ☐ 0.23
- ☐ 0.3
- ☐ 0.33

Proposta de resolução:

A resposta é 0.25.

Pretendemos saber a probabilidade de os números obtidos serem ambos menores que 4.

Para determinar a probabilidade pedida utilizaremos a Regra de Laplace

$$P(\text{ambos os números menores que 4}) = \frac{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de casos favoráveis}}{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de casos possíveis}}$$

Comecemos por construir uma tabela que nos permita verificar todas as hipóteses possíveis de resultado:

B/D	1	2	3	4	5	6
1	**(1,1)**	**(1,2)**	**(1,3)**	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
2	**(2,1)**	**(2,2)**	**(2,3)**	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
3	**(3,1)**	**(3,2)**	**(3,3)**	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
5	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
6	$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

A caixa tem 6 bolas numeradas de 1 a 6 e o dado tem 6 faces também numeradas de 1 a 6. Logo:

$$\text{O número de casos possíveis é dado por: } 6 \times 6 = 36$$

Pretendemos saber a probabilidade de, ao retirar uma bola do saco e lançar o dado, obter dois números menores que 4.

Pela tabela podemos verificar que

$$\text{O número de casos favoráveis é } 9$$

Logo a probabilidade pedida é dada por:

$$P(\text{ambos os números menores que } 4) = \frac{9}{36} = 0.25$$

Exercício **E97K50_Laplace_002** (ver código fonte na pág. 135):

Este exercício trabalha o cálculo da probabilidade usando diretamente a Regra de Laplace.

Foram parametrizadas as variáveis correspondentes ao número de CD's de cada tipo de música sendo que o número de CD's de música rock pode tomar valores inteiros entre 5 e 15 e o número de CD's de música popular entre 1 e o valor atribuído ao número de CD's de rock, subtraído de 2 valores.

A construção deste exercício não suscitou dificuldades.

O nível de dificuldade deste exercício, para os alunos, é fácil.

Enunciado:

A Maria gravou 8 CD, 2 de música rock e 6 com música popular, mas esqueceu-se de identificar cada um deles. Qual é a probabilidade de ao escolher dois CD ao acaso, um ser de música rock e o outro ser de música popular?

- ☐ $\frac{3}{7}$
- ☐ $\frac{7}{3}$
- ☐ $\frac{8}{7}$
- ☐ $\frac{6}{7}$

Proposta de resolução:

A resposta é $\frac{3}{7}$.

Seja A o acontecimento *"os CD's serem um de música rock e outro de música popular"*

Utilizaremos a Regra de Laplace

$$P(A) = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos favoráveis}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos possíveis}}$$

N$^{\text{o}}$ de casos possíveis: $8 \times (8-1) = 56$

N$^{\text{o}}$ de casos favoráveis: $2 \times 2 \times 6 = 24$

$$P(A) = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

Exercício **E97K50_Laplace_003** (ver código fonte na pág. 137):

Este exercício trabalha o cálculo de probabilidade utilizando uma tabela de dupla entrada para verificar todas os resultados possíveis.

Apenas foi parametrizado o valor colocado na pergunta.

A única dificuldade, a nível de informática, foi no preenchimento da tabela para o qual foi necessário utilizar uma função adequada.

O nível de dificuldade deste exercício, para os alunos, é fácil.

Enunciado:

Lançam-se dois dados equilibrados. Anota-se a quantidade de pintas que saem na face voltada para cima. Qual é a probabilidade de a soma das pintas obtida ser igual a 8?

- ☐ $\frac{5}{36}$
- ☐ $\frac{36}{5}$
- ☐ $\frac{2}{9}$
- ☐ 8

Proposta de resolução:

A resposta é $\frac{5}{36}$.

Pretendemos saber a probabilidade de obter 8 na soma das pintas dos dois dados.

Seja, então, o acontecimento

$$A = \text{“soma obtida nos dois dados''}$$

Para determinar a probabilidade pedida utilizaremos a Regra de Laplace

$$P(A) = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos favoráveis}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos possíveis}}$$

Comecemos por construir uma tabela que nos permita verificar todas as hipóteses possíveis de resultado da soma:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

O número total de pares de lançamentos possíveis e equiprováveis é dado por: $6 \times 6 = 36$

Verificamos que a soma pretendida (8) se encontra numa diagonal. O número de casos favoráveis é 5, logo:

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

Exercício **E97K50_ProbCondicionada_001** (ver código fonte na pág. 140):

Este exercício trabalha a probabilidade condicionada, usando diretamente a definição.

Foram parametrizadas as variáveis respeitantes ao número de alternativas de resposta na escolha múltipla e à percentagem de alunos que sabem responder à questão. No que respeita ao número de alternativas, estas podem tomar valores inteiros entre 4 e 6, e em relação à percentagem de alunos que sabem responder à questão esta pode tomar valores inteiros entre 30 e 70.

Este exercício, para os alunos, tem dificuldade média.

Enunciado:

Num teste de Matemática uma questão de escolha múltipla tem 4 alternativas. Da turma, 65% dos alunos sabem resolver a questão. Os restantes respondem sem saber, "à sorte". Um aluno é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de não saber a resposta, isto é, ter respondido "à sorte", sabendo que acertou a questão?

- ☐ $\frac{7}{59}$
- ☐ $\frac{28}{41}$
- ☐ $\frac{4}{5}$
- ☐ $\frac{20}{13}$

Proposta de resolução:

A resposta é $\frac{7}{59}$.

A probabilidade que se pretende determinar é:

$$P(\text{não sabe}|\text{acerta}) = \frac{P(\text{não sabe} \cap \text{acerta})}{P(\text{acerta})}$$

Ora,

$$P(\text{acerta}) = P(\text{acerta} \cap \text{sabe}) + P(\text{acerta} \cap \text{não sabe})$$

Se

$$P(\text{acerta} \cap \text{sabe}) = P(\text{sabe}) \times P(\text{acerta}|\text{sabe}) = \frac{65}{100} \times 1 = \frac{13}{20},$$

e se

$$P(\text{acerta} \cap \text{não sabe}) = P(\text{não sabe}) \times P(\text{acerta}|\text{não sabe}) = \left(1 - \frac{65}{100}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{7}{20} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{80}$$

podemos dizer que:

$$P(\text{acerta}) = \frac{13}{20} + \frac{7}{80} = \frac{59}{80}$$

Sendo assim, podemos afirmar que:

$$P(\text{não sabe}|\text{acerta}) = \frac{P(\text{não sabe} \cap \text{acerta})}{P(\text{acerta})} = \frac{\frac{7}{80}}{\frac{13}{20} + \frac{7}{80}} = \frac{\frac{7}{80}}{\frac{59}{80}} = \frac{7}{59}$$

Exercício **E97K50_ProbCondicionada_002** (ver código fonte na pág. 142):

Este exercício trabalha a probabilidade condicionada com os dados apresentados numa tabela de dupla entrada (tabela de contingência).

No enunciado da questão foram parametrizadas todas as variáveis constantes na tabela garantindo que o total de alunos é 28. Na colocação da pergunta foram também parametrizadas as variáveis respeitantes ao sexo e à idade.

Este exercício aglomera várias combinações possíveis de resposta, tendo surgido a necessidade de escolher um texto, na resolução, adequada à questão colocada.

O nível de dificuldade deste exercício, para os alunos, é fácil.

Enunciado:

Numa turma de uma escola secundária, a distribuição dos alunos por idade e por sexo é a seguinte:

	Rapazes	Raparigas
16 anos	11	7
17 anos	4	6

Escolhe-se ao acaso um aluno dessa turma.

Qual é a probabilidade de o aluno escolhido ter 17 anos sabendo que é rapariga?

- ☐ $\frac{6}{13}$
- ☐ 6
- ☐ $\frac{3}{14}$
- ☐ $\frac{1}{3}$

Proposta de resolução:

A resposta é $\frac{6}{13}$. Pela definição de probabilidade condicionada temos:

$$P(17anos|rapariga) = \frac{P(17anos \cap rapariga)}{P(rapariga)}$$

Assim:

$$P(17anos|rapariga) = \frac{P(17anos \cap rapariga)}{P(rapariga)} =$$

$$= \frac{P(17anos \cap rapariga)}{P(16 \text{ anos}) \times P(rapariga|16 \text{ anos}) + P(17 \text{ anos}) \times P(rapariga|17 \text{ anos})}$$

$$\frac{P(17 \text{ anos} \cap \text{rapariga})}{P(\text{rapariga})} = \frac{\frac{6}{28}}{\frac{7}{28} + \frac{6}{28}} = \frac{6}{7+6} = \frac{6}{13}$$

Exercício **E97K50_RegraBayes_001** (ver código fonte na pág. 146):

Este exercício trabalha o cálculo de probabilidades usando a Regra de Bayes e recorrendo à construção de um diagrama de árvore para sintetizar a informação dada no enunciado.

No enunciado foram parametrizadas as variáveis correspondentes à percentagem de alunos com dificuldade a Matemática, por ano de escolaridade, e ainda à percentagem do número de alunos que frequentam cada ano. Na colocação da questão está também parametrizado o ano que o aluno frequenta, sabendo que tem dificuldade a Matemática, podendo assumir os valores 10, 11 ou 12.

Em relação à variável *percentagem de alunos com dificuldades* esta pode tomar qualquer valor inteiro compreendido entre 5 e 20. Já em relação à percentagem de alunos, por ano de escolaridade, houve necessidade de garantir que a soma fosse 100%. Por tal, para os 10.º e 11.º anos foi definido que a variável podia tomar qualquer valor inteiro entre 20% e 30%, enquanto que para o 12.º ano foi assegurado que a o valor que lhe seria atribuído, adicionado aos anteriores totalizaria 100%.

O maior desfio deste exercício, a nível de programação, foi a construção do diagrama de árvore em função das variáveis definidas.

O exercício tem um nível de dificuldade, para os alunos, médio.

Enunciado:

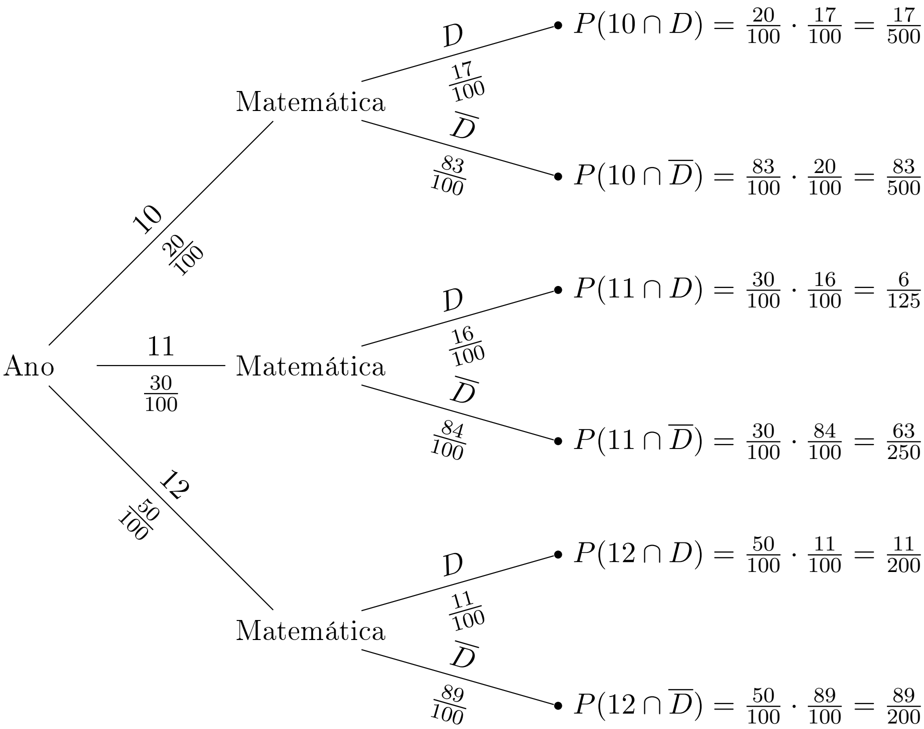
Numa escola secundária, sabe-se que têm dificuldade a Matemática 11% dos alunos do 12.º ano, 16% dos alunos do 11.º ano e 17% do 10.º ano. Sabe-se ainda que 20% dos estudantes frequentam o 10.º ano, 30% o 11.º ano e 50% o 12.º ano. Seleciona-se um estudante ao acaso. Determina a probabilidade que frequente o 11.º ano, sabendo que tem dificuldade a Matemática.
Apresenta o resultado arredondado com duas casas decimais.

- ☐ $\frac{48}{137} \simeq 0.35$
- ☐ $\frac{137}{48} \simeq 2.85$
- ☐ $\frac{6}{125} \simeq 0.05$
- ☐ $\frac{24}{41} \simeq 0.59$

Proposta de resolução:

O exercício pode ser resolvido utilizando a Regra de Bayes. Sendo "D: o aluno tem dificuldade a matemática"

$$
\begin{aligned}
P(11^{\underline{o}}|D) &= \frac{P(D|11^{\underline{o}}) \times P(11^{\underline{o}})}{P(D)} \\
&= \frac{P(11^{\underline{o}} \cap D)}{P(D)}
\end{aligned}
$$



$$P(11^{\underline{o}}|D) = \frac{P(D|11^{\underline{o}}) \times P(11^{\underline{o}})}{P(D)} = \frac{P(11^{\underline{o}} \cap D)}{P(D)}$$

$$\frac{P(11^{\underline{o}} \cap D)}{P(D)} = \frac{P(11^{\underline{o}} \cap D)}{P(10^{\underline{o}}) \times P(D|10^{\underline{o}}) + P(11^{\underline{o}}) \times P(D|11^{\underline{o}}) + P(12^{\underline{o}}) \times P(D|12^{\underline{o}})}$$

$$\frac{P(11^{\underline{o}} \cap D)}{P(D)} = \frac{P(11^{\underline{o}} \cap D)}{\frac{17}{500} + \frac{6}{125} + \frac{11}{200}}$$

$$\frac{P(11^{\underline{o}} \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{6}{125}}{\frac{17}{500} + \frac{6}{125} + \frac{11}{200}} = \frac{48}{137} \simeq 0.35$$

Exercício **E97K50_RegraBayes_002** (ver código fonte na pág. 153):

Este exercício trabalha o cálculo de probabilidades usando a Regra de Bayes recorrendo à construção de um diagrama de árvore para sintetizar a informação dada no enunciado.

No enunciado foram parametrizadas as variáveis correspondentes ao número de bolas brancas e pretas contidas em cada uma das três caixas.

Na colocação da questão está também parametrizada a cor da bola que é extraída bem como o número da caixa da qual é retirada a bola.

Para cada caixa, I, II ou III, as variáveis *número de bolas brancas* e *número de bolas pretas* podem tomar valores inteiros, no mínimo de 1 e no máximo de 6, variando de caixa para caixa.

O maior desafio deste exercício, a nível de programação foi, para além da construção do diagrama de árvore em função das variáveis definidas, a definição da função que permite a seleção aleatória do número da caixa e da cor da bola que é extraída. Este exercício aglomera várias combinações possíveis de resposta tendo surgido a necessidade de escolher um texto, na resolução, adequado à questão colocada. A construção destas diferentes respostas implicou, quer na parte do texto, quer na parte da programação, a utilização de funções próprias.

O exercício tem um nível de dificuldade, para os alunos, médio.

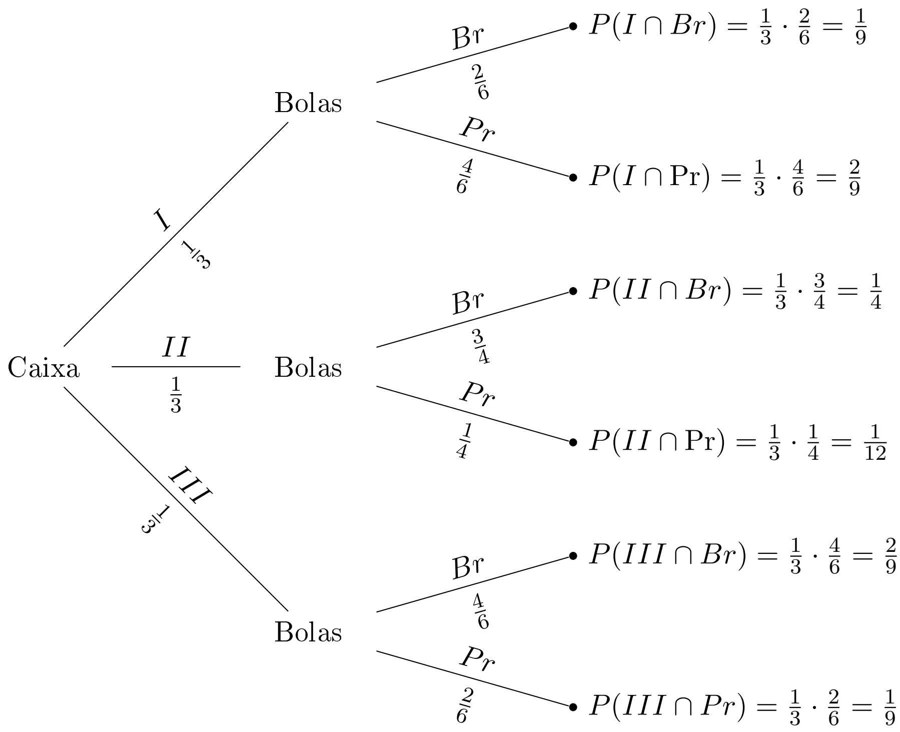
Enunciado:

A caixa I contém 2 bolas brancas e 4 bolas pretas; a caixa II contém 3 bolas brancas e 1 bolas pretas; a caixa III contém 4 bolas brancas e 2 bolas pretas. Escolhe-se uma caixa ao acaso e extrai-se uma bola: é branca. Qual é a probabilidade de ter sido escolhida da Caixa II?
Apresenta o resultado em forma de fração.

- ☐ $\frac{3}{7}$
- ☐ $\frac{1}{4}$
- ☐ $\frac{81}{2}$
- ☐ $\frac{1}{7}$

Proposta de resolução:

O exercício pode ser resolvido utilizando a Regra de Bayes e um Diagrama de árvore.



$$\begin{aligned} P(CaixaII|Branca) &= \frac{P(Branca|CaixaII) \times P(CaixaII)}{P(Branca)} \\ &= \frac{P(CaixaII \cap Branca)}{P(Branca)} \end{aligned}$$

$$\frac{P(CaixaII \cap Branca)}{P(Branca)} = \frac{P(CaixaII \cap Branca)}{P(\text{Caixa I}) \times P(Branca|\text{Caixa I}) + P(\text{Caixa II}) \times P(Branca|\text{Caixa II}) + P(\text{Caixa III}) \times P(Branca|\text{Caixa III})}$$

$$\frac{P(\text{Caixa II} \cap \text{Branca})}{P(\text{Branca})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{2}{9}} = \frac{3}{7}$$

Exercício **E97K50_DiagramaVenn_001** (ver código fonte na pág. 160):

Este exercício trabalha o cálculo de probabilidade condicionada recorrendo a diagramas de Venn de forma a sintetizar a informação fornecida no enunciado.

No enunciado foram parametrizados os valores de $P(A)$ e $P(A \cap B)$, podendo tomar valores inteiros entre 30% e 50% e entre 10% e 20%, respetivamente.

O maior desafio deste exercício, a nível de programação, foi a construção, usando o pacote TikZ, dos diagramas de Venn adequados às variáveis selecionadas. A nível matemático o maior desafio foi garantir que o valor de $P(A \cup B)$ apenas tomaria valores compreendidos entre o $\text{máx}(P(A),\, P(B))$ e o $\text{mín}(100, P(A) + P(B))$.

O exercício tem uma nível de dificuldade, para os alunos, médio.

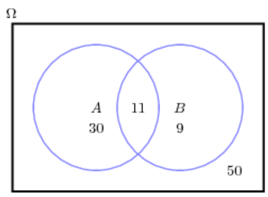
Enunciado:

Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subseteq \Omega$ e $B \subseteq \Omega$). Tem-se que:

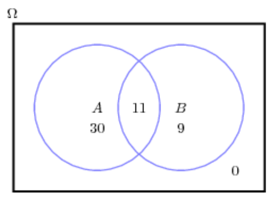
$$P(A) = 41\% \qquad P(A \cap B) = 11\% \qquad P(A \cup B) = 50\%$$

Utiliza o Diagrama de Venn e determina o valor da probabilidade condicional $P(A|B)$. Apresenta o resultado em percentagem, arredondado com duas casas decimais.

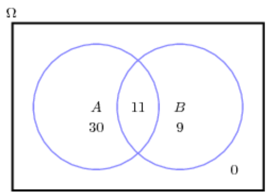
☐ $P(A|B) = 55.0\%$



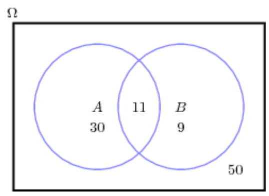
☐ $P(A|B) = 11.0\%$



☐ $P(A|B) = 22.0\%$

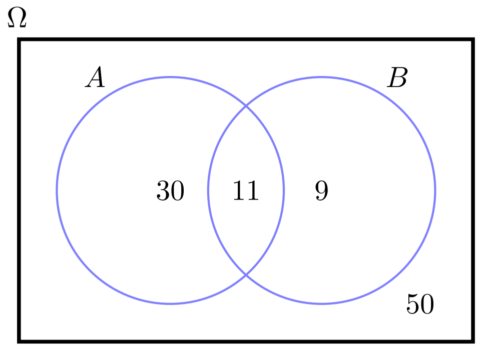


☐ $P(A|B) = 26.83\%$



Proposta de resolução:

A resposta é



$P(A|B) = 55.0\%$

Vamos construir um diagrama de Venn que resuma a informação dada.

Começamos por escrever no diagrama os 11% correspondentes a $A \cap B$.

Em seguida completa-se a informação relativa a $A \setminus B$ $(41\% - 11\% = 30\%)$ e finalmente a informação relativa a $B \setminus A$ $(50\% - (30\% + 11\%) = 9\%)$.

Apesar de não ser necessário para a resolução deste problema, poderemos verificar se alguma probabilidade de haver um valor que não pertença nem a A nem a B.

Assim, sabendo que

$P(A \cap B) + P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 100\%$

podemos calcular esta probabilidade:

$11\% + 30\% + 9\% + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 100\% \Leftrightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 100\% - 11\% - 30\% - 9\% \Leftrightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 50\%$

Vamos agora determinar o valor de $P(A|B)$

Por definição de Probabilidade Condicionada sabemos que:

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{11\%}{11\%+9\%} = \frac{11\%}{20\%} = \frac{11}{20} = 55.0\%$

Exercício **E97K50_DiagramaVenn_002** (ver código fonte na pág. 166):

Este exercício trabalha o cálculo da probabilidade recorrendo ao Diagrama de Venn para sintetizar a informação dada no enunciado.

No enunciado foram parametrizadas as variáveis correspondentes ao número total de pessoas inquiridas e também as variáveis correspondentes ao número dos inquiridos que deram os diferentes tipos de resposta.

Em relação à variável *número total de inquiridos* a intenção inicial era a de esta poder tomar valores inteiros entre 400 e 500. No entanto, a dimensão deste número impediu a geração (informaticamente) de uma sua partição em quatro números inteiros. Este problema foi contornado reduzindo o conjunto de valores que a variável podia assumir para valores compreendidos entre 40 e 50, adicionando depois 100 a cada número gerado na decomposição do número.

O nível de dificuldade deste exercício, para os alunos, é fácil.

Enunciado:

Realizou-se um inquérito a 443 pessoas sobre o tipo de jornais que leem. As respostas foram as seguintes:

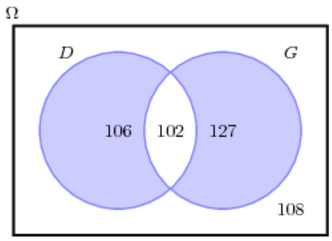
229 pessoas leem jornais generalistas

106 pessoas leem apenas jornais desportivos

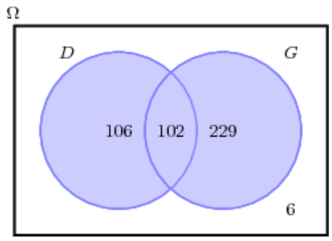
102 pessoas leem jornais generalistas e desportivos

Desenha um diagrama de Venn que resuma a informação dada e determina a probabilidade de, escolhida uma pessoa ao acaso de entre as que responderam ao inquérito, esta apenas ler um destes tipos de jornal. (Apresenta o resultado arredondado às centésimas)

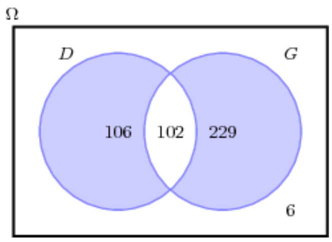
☐ A probabilidade pedida é 0.53



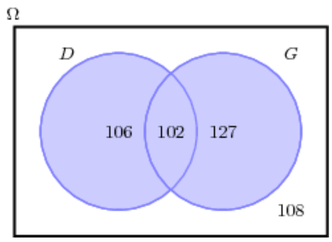
☐ A probabilidade pedida é 0.99



☐ A probabilidade pedida é 0.76

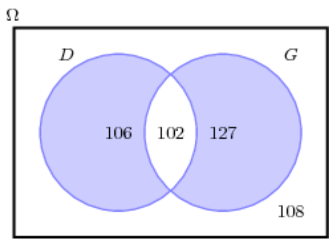


☐ A probabilidade pedida é 0.76



Proposta de resolução:

O diagrama de Venn que resume a informação dada é



e a probabilidade pedida é: 0.53

Vamos construir um diagrama de Venn.

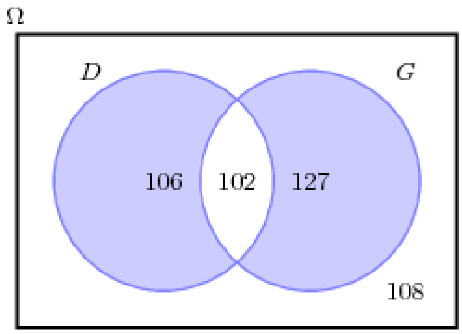
Para isso consideremos os conjuntos D e G referentes, respetivamente, ao conjunto das pessoas que leem jornais desportivos e ao conjunto das pessoas que leem jornais generalistas.

Começamos por escrever no diagrama o valor 102 correspondente a $D \cap G$.

Em seguida completa-se a informação relativa a $D \setminus G$ (106) e finalmente a informação relativa a $G \setminus D$ (229-102=127).

Por fim coloca-se o valor referente ao número de pessoas que não leem nem jornais generalistas nem jornais desportivos (443-(106+102+127)=108)

Assim, o diagrama que resume a informação dada é o seguinte:



e a probabilidade pedida será dada por $\frac{106+127}{443} = \frac{233}{443} = 0.53$

Exercício **E97k50_FunProbabilidade_001** (ver código fonte na pág. 172):

Este exercício pretende utilizar o valor médio para determinar valores na tabela de Distribuição de Probabilidade.

Foram parametrizados todos os valores constantes tabela.

O maior desafio, a nível matemático, foi garantir que o $\sum_{x=i} P(X = x_i) = 1$. Para tal, foi utilizada a função *partition* realizando-se uma partição do número 10, decompondo-o em 3 parcelas. Cada uma destas parcelas foi depois dividida por 10, garantindo, assim, que a soma destes valores era 1.

Utilizando os valores definidos na partição foi determinado o valor médio, que aparece como um valor parametrizado na questão.

A nível informático, o maior desafio foi construção, usando linguagem LaTeX de um sistema de equações para apoiar a resolução do exercício.

O nível de dificuldade do exercício, para os alunos, é médio.

Enunciado:

A tabela de distribuição de probabilidade de uma certa variável aleatória X é:

x_i	$P(X = x_i)$
1	a
2	b
3	0.1

onde a e b designam números reais

O valor médio desta variável é 1.7. Qual é o valor de a?

- ☐ 0.4
- ☐ 1.4
- ☐ 0.5
- ☐ 0.3

Proposta de resolução:

A soma das probabilidades de todos os acontecimentos elementares do espaço amostral é igual a 1.

Logo $a + b + 0.1 = 1$

O valor médio é dado por $\mu = a \times 1 + b \times 2 + 0.1 \times 3$

Assim, para determinar o valor de a basta resolver o sistema

$$\begin{cases} a + b + 0.1 = 1 \\ 1 \times a + 2 \times b + 3 \times 0.1 = 1.7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + 0.1 = 1 \\ 1 \times a + 2 \times b + 3 \times 0.1 = 1.7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 - 0.1 \\ 1 \times a + 2 \times b + 0.3 = 1.7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0.9 \\ 1 \times a + 2 \times b = 1.7 - 0.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0.9 - b \\ 1 \times a + 2 \times b = 1.4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0.9 - b \\ 1 \times (0.9 - b) + 2 \times b = 1.4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0.9 - b \\ 0.9 - 1 \times b + 2 \times b = 1.4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0.9 - b \\ 0.9 + 1 \times b = 1.4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0.9 - b \\ 1 \times b = 1.4 - 0.9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0.9 - b \\ 1 \times b = 0.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0.9 - b \\ b = \frac{0.5}{1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0.9 - 0.5 \\ b = 0.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0.4 \\ b = 0.5 \end{cases}$$

Então $a = 0.4$

Exercício **E97k50_FunProbabilidade_002** (ver código fonte na pág. 176):

Este exercício pretende determinar o valor médio numa dada Distribuição de Probabilidade.

Foram parametrizados tanto os valores correspondentes a x_i como o valor dado de $P(X = x_i)$. Os valores de x_i encontram-se em sequência aritmética, de razão dois, sendo que o menor valor que x_i pode tomar é um número inteiro entre 2 e 5. O valor de $P(X = x_i)$ pode tomar um valor real, com uma casa decimal, do intervalo $[0, 1]$.

O nível de dificuldade deste exercício é, para os alunos, fácil.

Enunciado:

A tabela de distribuição de probabilidade de uma certa variável aleatória X é:

x_i	$P(X = x_i)$
5	a
7	a
9	0.4

onde a designa um número real.

Qual é o valor médio desta variável aleatória?

- ☐ 7.2
- ☐ 7.3
- ☐ 7.1
- ☐ 7.4

Proposta de resolução:

A soma das probabilidades de todos os acontecimentos elementares do espaço amostral é igual a 1.

Logo:

$a + a + 0.4 = 1 \Leftrightarrow 2 \times a = 1 - 0.4 \Leftrightarrow 2 \times a = 0.6 \Leftrightarrow a = \frac{0.6}{2} \Leftrightarrow a = 0.3$

O valor médio é dado por:

$$\mu = 5 \times a + 7 \times a + 9 \times 0.4 \Leftrightarrow \mu = 5 \times 0.3 + 7 \times 0.3 + 9 \times 0.4 \Leftrightarrow \mu = 1.5 + 2.1 + 3.6 \Leftrightarrow \mu = 7.2$$

Então $\mu = 7.2$

Exercício **E97k50_FunProbabilidade_003** (ver código fonte na pág. 179):

Este exercício pretende determinar a probabilidade de determinado acontecimento usando a distribuição binomial e construindo a respetiva tabela de distribuição.

Não se pretende, neste exercício, que o aluno identifique o modelo Binomial, mas antes que calcule as probabilidades com vista à construção da função massa de probabilidade, usando as propriedades das probabilidades.

Foi parametrizada a variável correspondente ao número de amigos que compram a pizza, podendo tomar valores inteiros entre 2 e 5.

Na colocação da questão está também parametrizada a variável *oferta* e o número de amigos a quem sai esse brinde. Os valores da variável *oferta* podem ser selecionados entre *lata de refrigerante*, *sobremesa* e *brinde surpresa.*

Um dos desafios deste exercício, a nível de programação, foi a construção da tabela dinâmica, pois o número de colunas varia em função do número de amigos.

Além disso, este exercício aglomera várias combinações possíveis de resposta tendo surgido a necessidade de escolher um texto, na resolução, adequado à questão colocada. A construção destas diferentes respostas implicou, quer na parte do texto, quer na parte da programação, a utilização de funções próprias.

O nível deste exercício, para os alunos, é difícil.

Enunciado:

Durante uma campanha publicitária uma marca de Pizza oferece, por cada pizza individual, uma de três ofertas: uma lata de refrigerante, uma sobremesa ou um brinde surpresa.

5 amigos compram uma pizza cada um.

Supõe que as ofertas têm igual probabilidade de sair. Constrói o modelo de probabilidade para esta variável e determina a probabilidade de sair uma lata de refrigerante a exatamente 2 dos 5 amigos?

☐

x_i	0	1	2	3	4	5
$\mathrm{P}(X = x_i)$	$\mathrm{P}(X = 0)$	$\mathrm{P}(X = 1)$	$\mathrm{P}(X = 2)$	$\mathrm{P}(X = 3)$	$\mathrm{P}(X = 4)$	$\mathrm{P}(X = 5)$
$\mathrm{P}(X = x_i)$	$32/243$	$80/243$	$80/243$	$40/243$	$10/243$	$1/243$

A probabilidade pedida é $\frac{80}{243}$.

☐

x_i	0	1	2	3	4	5
$\mathrm{P}(X = x_i)$	$\mathrm{P}(X = 0)$	$\mathrm{P}(X = 1)$	$\mathrm{P}(X = 2)$	$\mathrm{P}(X = 3)$	$\mathrm{P}(X = 4)$	$\mathrm{P}(X = 5)$
$\mathrm{P}(X = x_i)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

A probabilidade pedida é $\frac{1}{5}$.

☐

x_i	0	1	2	3	4	5
$\mathrm{P}(X = x_i)$	$\mathrm{P}(X = 0)$	$\mathrm{P}(X = 1)$	$\mathrm{P}(X = 2)$	$\mathrm{P}(X = 3)$	$\mathrm{P}(X = 4)$	$\mathrm{P}(X = 5)$
$\mathrm{P}(X = x_i)$	$1/243$	$1/243$	$1/243$	$1/243$	$1/243$	$1/243$

A probabilidade pedida é $\frac{1}{243}$.

☐

x_i	0	1	2	3	4	5
$\mathrm{P}(X = x_i)$	$\mathrm{P}(X = 0)$	$\mathrm{P}(X = 1)$	$\mathrm{P}(X = 2)$	$\mathrm{P}(X = 3)$	$\mathrm{P}(X = 4)$	$\mathrm{P}(X = 5)$
$\mathrm{P}(X = x_i)$	$32/243$	$16/243$	$8/243$	$4/243$	$2/243$	$1/243$

A probabilidade pedida é $\frac{8}{243}$.

Proposta de resolução:

Estamos perante um modelo binomial.

A probabilidade de sucesso (saída de uma lata de refrigerante) é igual a $\frac{1}{3}$ e a probabilidade de insucesso (não saída de uma lata de refrigerante) é igual a $\frac{2}{3}$

Os valores da variável X: "número de amigos a quem sai uma lata de refrigerante" são:

0, 1, ... ,5

A tabela de distribuição de probabilidades é:

$$P(X = 0) = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{5-0} = \frac{32}{243}$$

$$P(X=1) = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{1} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{5-1} = \frac{80}{243}$$

$$P(X=2) = 10 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{5-2} = \frac{80}{243}$$

$$P(X=3) = 10 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{5-3} = \frac{40}{243}$$

$$P(X=4) = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{5-4} = \frac{10}{243}$$

$$P(X=5) = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{5} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{5-5} = \frac{1}{243}$$

x_i	0	1	2	3	4	5
$\mathrm{P}(X = x_i)$	$\mathrm{P}(X = 0)$	$\mathrm{P}(X = 1)$	$\mathrm{P}(X = 2)$	$\mathrm{P}(X = 3)$	$\mathrm{P}(X = 4)$	$\mathrm{P}(X = 5)$
$\mathrm{P}(X = x_i)$	$32/243$	$80/243$	$80/243$	$40/243$	$10/243$	$1/243$

A probabilidade de sair uma lata de refrigerante a exatamente 2 dos 5 amigos é $\frac{80}{243}$.

Exercício **E97k50_FunProbabilidade_004** (ver código fonte na pág. 187):

Este exercício pretende determinar a probabilidade usando a regra do produto.

Foram parametrizadas as variáveis correspondentes ao número total de bolas, tal como o número de bolas de cada uma das cores.

Existem três hipóteses de pergunta pelo que este exercício aglomera várias combinações possíveis de resposta. Surgiu a necessidade de escolher um texto, na resolução, adequado à questão colocada.

Apesar de, para responder a uma das hipóteses de questão, a construção da tabela de distribuição não ser necessária, optou-se faze-lo como suporte para a resposta às restantes hipóteses de questão.

O nível de dificuldade deste exercício, para os alunos, é difícil.

Enunciado:

Um saco contém um total de 14 bolas, sendo 8 bolas brancas e 6 bolas verdes.

Retiram-se 3 bolas, sem reposição.

Seja X a variável aleatória que faz corresponder a cada extração o número de bolas verdes.

Determina a probabilidade de saírem apenas duas bolas verdes?

- ☐ $\frac{30}{91}$
- ☐ $\frac{10}{91}$
- ☐ $\frac{1}{14}$
- ☐ $\frac{3}{7}$

Proposta de resolução:

Seja X = número de bolas verdes

Ao extrair três bolas do saco poderemos obter zero bolas verdes (X = 0), uma bola verde e duas bolas brancas (X = 1), duas bolas verdes e uma bola branca (X = 2) ou todas as bolas verdes (X = 3).

Para definir a função massa de probabilidade desta variável aleatória temos de determinar a probabilidade de cada um dos elementos do suporte do modelo (cada valor da variável).

Assim:

A probabilidade de saírem as bolas todas brancas, isto é, nenhuma bola verde, é dada por:

$$P(X = 0) = 1 \times \frac{8}{14} \times \frac{8-1}{14-1} \times \frac{8-2}{14-2} = 1 \times \frac{8}{14} \times \frac{7}{13} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{13}$$

A probabilidade de sair uma bola verde e duas brancas é dada por:

$$P(X=1) = 3 \times \frac{6}{14} \times \frac{8}{14-1} \times \frac{8-1}{14-2} = 3 \times \frac{6}{14} \times \frac{8}{13} \times \frac{7}{12} = \frac{6}{13}$$

A probabilidade de sair duas bolas verdes e uma branca é dada por:

$$P(X=2) = 3 \times \frac{6}{14} \times \frac{6-1}{14-1} \times \frac{8}{14-2} = 3 \times \frac{6}{14} \times \frac{5}{13} \times \frac{2}{3} = \frac{30}{91}$$

A probabilidade de saírem todas as bolas verdes é dada por:

$$P(X=3) = 1 \times \frac{6}{14} \times \frac{6-1}{14-1} \times \frac{6-2}{14-2} = 1 \times \frac{8}{14} \times \frac{5}{13} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{91}$$

A tabela ficará assim definida:

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$P(X=0)$	$P(X=1)$	$P(X=2)$	$P(X=3)$
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{13}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{30}{91}$	$\frac{5}{91}$

A probabilidade de saírem apenas duas bolas brancas é dada por $P(X = 2)$

$$P(X=2) = \frac{30}{91}$$

Exercício **E97k50_FunProbabilidade_005** (ver código fonte na pág. 193):

Este exercício trabalha a definição da função massa de probabilidade.

Foi parametrizada a variável *n.º de irmãos* podendo ser atribuída a sequência de valores $0, 1, 2, 3, 4$ ou $1, 2, 3, 4, 5$. Foi decidido previamente que o número total de alunos da turma seria 25 realizando-se depois uma partição deste número, de dimensão 5, correspondente às frequências absolutas.

Na colocação da questão, foi também parametrizada a variável correspondente ao número de irmãos.

O maior desafio, a nível informático, foi a construção, na resolução do exercício, da tabela correspondente à função massa e na definição de tabelas diferentes para cada uma das respostas erradas.

O nível de dificuldade deste exercício, para os alunos, é médio.

Enunciado:

O número de irmãos dos alunos de uma turma do 11º ano, que tem 25 alunos, é dado pela seguinte tabela:

Nº de irmãos	1	2	3	4	5
Freq. Absoluta	5	15	2	2	1

Define a função massa de probabilidade da variável aleatória

X - "número de irmãos de um aluno escolhido aos acaso da turma"

e indica a probabilidade de um aluno, dessa turma, ter pelo menos 3 irmãos.

- ☐
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.2 & 0.6 & 0.08 & 0.08 & 0.04 \end{pmatrix}$$
A probabilidade pedida é: 0.2

- ☐
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.2 & 0.6 & 0.08 & 0.08 & 0.04 \end{pmatrix}$$
A probabilidade pedida é: 0.08

- ☐
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$
A probabilidade pedida é: $\frac{3}{5}$

- ☐
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.2 & 0.6 & 0.08 & 0.08 & 0.04 \end{pmatrix}$$
A probabilidade pedida é: 0.12

Proposta de resolução:

Para definir a função massa de probabilidade desta variável aleatória temos de determinar a probabilidade de cada um dos elementos do suporte do modelo (cada valor da variável).

Assim:

$$P(X = 1) = \frac{5}{25} = 0.2$$

$$P(X = 2) = \frac{15}{25} = 0.6$$

$$P(X = 3) = \frac{2}{25} = 0.08$$

$$P(X = 4) = \frac{2}{25} = 0.08$$

$$P(X = 5) = \frac{1}{25} = 0.04$$

Então a função massa fica assim definida:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ P(X=1) & P(X=2) & P(X=3) & P(X=4) & P(X=5) \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5/25 & 15/25 & 2/25 & 2/25 & 1/25 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.2 & 0.6 & 0.08 & 0.08 & 0.04 \end{pmatrix}$$

Determinar a probabilidade de um aluno da turma, escolhido ao acaso, ter pelo menos 3 irmãos é o mesmo que determinar a probabilidade de o aluno ter no mínimo 3 irmãos, ou seja $P(X \geq 3)$.

Então a resposta é

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0.08 + 0.08 + 0.04 = 0.2$$

Exercício **E97k50_ModProbabilidade_001** (ver código fonte na pág. 198):

Este exercício trabalha o cálculo de probabilidade numa distribuição de Poisson.

Foram parametrizados todos os valores constantes no enunciado do exercício. O número de chamadas pode tomar valores inteiros entre 3 e 8.

Na construção deste exercício houve necessidade de garantir a utilização de um número elevado de casas decimais nos cálculos intermédios para não correr o risco de, na fórmula do modelo, aparecer um fator igual a zero.

A dificuldade deste exercício, para os alunos, é média.

Enunciado:

Supõe que uma central telefónica recebe, em média, 6 chamadas cada 4 minutos. Qual é a probabilidade que a central receba 2 chamadas num intervalo de 5 minutos?
Utiliza, para os cálculos intermédios, arredondamentos com um mínimo de quatro casas decimais. Apresenta o resultado final em percentagem, arredondado às centésimas.

- ☐ A probabilidade pedida é : 1.56%
- ☐ A probabilidade pedida é : 4.46%
- ☐ A probabilidade pedida é : 2.23%
- ☐ A probabilidade pedida é : 2.17%

Proposta de resolução:

Estamos perante uma variável que representa o número de vezes que determinado fenómeno ocorre num dado período de tempo. O modelo de Poisson adapta-se a este tipo de situações.

Designemos por X a variável que representa o número de chamadas que a central recebe em 4 minutos.

Sabemos que $\lambda = 6$.

Se, em média, a central telefónica recebe 6 chamadas durante 4 minutos, podemos dizer que, em 5 minutos receberá $\frac{6}{4} \times 5 = 1.5 \times 5 = 7.5$ chamadas em média.

Podemos definir uma nova variável também com distribuição de Poisson mas com parâmetro 7.5 e que representa o número de chamadas recebidas em 5 minutos.

A probabilidade de serem recebidas 2 chamadas em 5 minutos será dada por:

$$P(Y = 2) = e^{-7.5} \times \frac{7.5^2}{2!}$$

$$P(Y=2)=e^{-7.5}\times\frac{7.5^2}{2!}\Leftrightarrow P(Y=2)=0.0006\times\frac{56.25}{2}\Leftrightarrow P(Y=2)\approx 1.56\%$$

A probabilidade pedida é 1.56%.

Exercício **E97k50_ModProbabilidade_002** (ver código fonte na pág. 200):

Este exercício trabalha o cálculo de probabilidade de um acontecimento numa distribuição binomial, com a criação da respetiva tabela de distribuição de probabilidades.

Foi parametrizada a variável *número de vezes que a moeda é lançada* podendo tomar valores inteiros entre 2 e 5.

O maior desafio, a nível informático, foi a construção e o preenchimento da tabela dinâmica, uma vez que o número de colunas varia consoante o número de vezes que a moeda é lançada.

O nível de dificuldade deste exercício, para os alunos, é médio.

Enunciado:

Uma moeda honesta é lançada 2 vezes. Representa o modelo da distribuição do número de "Faces Nacionais" resultantes.

☐

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$P(X = 0)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$
$P(X = x_i)$	1/4	1/2	1/4

☐

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$P(X = 0)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$
$P(X = x_i)$	1/2	1/2	1/2

☐

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$P(X = 0)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$
$P(X = x_i)$	1/4	1/4	1/4

☐

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$P(X = 0)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$
$P(X = x_i)$	1/2	1/4	1/2

Proposta de resolução:

Estamos perante um modelo binomial, uma vez que:

Serão realizadas 2 observações independentes, sempre nas mesmas condições;

Em cada lançamento apenas são possíveis dois resultados: Obter "Face Nacional" com a probabilidade de $\frac{1}{2}$ e obter "Face Europeia" com a probabilidade de $\frac{1}{2}$.

O resultado de cada observação é independente dos resultados obtidos nas provas anteriores.

A probabilidade de sucesso é constante, não variando de observação para observação.

Nesta situação, ao lançar a moeda 2 vezes, as hipóteses de obter “Face Nacional” são: 0, 1, 2

São estes os valores da variável X: “número de Faces Nacionais obtidas”

A tabela de distribuição desta variável será:

x_i	0	1	2
$\mathrm{P}(X = x_i)$	$\mathrm{P}(X = 0)$	$\mathrm{P}(X = 1)$	$\mathrm{P}(X = 2)$
$\mathrm{P}(X = x_i)$	1/4	1/2	1/4

$$P(X = 0) = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2-0} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 1) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2-2} = \frac{1}{4}$$

Exercício **E97k50_ModProbabilidade_003** (ver código fonte na pág. 208):

Este exercício pretende determinar a probabilidade de determinado acontecimento usando o modelo Geométrico.

Foram parametrizadas as variáveis referentes quer ao número obtido no lançamento quer o número do lançamento no qual se obteve o sucesso. O sucesso poderá ser obtido entre o 1.º e o 5.º lançamento.

A maior dificuldade, a nível informático, foi a concretização de respostas adequadas ao n.º do lançamento onde se obteve o sucesso.

O nível de dificuldade, para o alunos, deste exercício é médio.

Enunciado:

O Pedro está a brincar com um dado com a forma de um tetraedro, cujos vértices estão numerados de 1 a 4. Qual a probabilidade de ele obter um 2 no 5º lançamento?
Apresenta o resultado em percentagem, arredondado às centésimas.

- ☐ A probabilidade pedida é : 7.91%
- ☐ A probabilidade pedida é : 25.0%
- ☐ A probabilidade pedida é : 1.17%
- ☐ A probabilidade pedida é : 0.1%

Proposta de resolução:

Estamos perante um modelo Geométrico.

No modelo Geométrico, para a variável aleatória X e parâmetro p, a probabilidade de um determinado acontecimento é dada por:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} \times p, k \in \{1, 2, ...\}$$

onde k representa o número de experiências até obter sucesso.

Queremos saber qual a probabilidade de o Pedro obter o primeiro sucesso, obter 2, no 5º lançamento.

Neste caso a probabilidade de ter sucesso (obter 2 no lançamento) é $\frac{1}{4}$.

Logo, a probabilidade de ter insucesso é $\frac{3}{4}$.

Designemos por X a variável aleatória associada a esta experiência, neste caso "contar o número de experiências até obter sucesso".

Se o Pedro obteve 2 no 5º lançamento significa que teve 4 insucessos, logo

$$P(X=5)=\left(\frac{3}{4}\right)^4\times\frac{1}{4}=\frac{81}{1024}\approx 7.91\%$$

A probabilidade pedida é 7.91%.

Exercício **E97k50_ModProbabilidade_004** (ver código fonte na pág. 213):

Este exercício pretende determinar a probabilidade de determinado acontecimento usando o modelo Geométrico.

Foram parametrizadas as variáveis referentes ao número obtido no lançamento e ao lançamento até ao qual se pode obter sucesso podendo este variar entre 3 e 6.

Este exercício aglomera várias combinações possíveis de resposta tendo surgido a necessidade de escolher um texto, na resolução, adequado à questão colocada, sendo este o maior desafio a nível de programação. A construção destas diferentes respostas implicou, quer na parte do texto, quer na parte da programação, a utilização de funções próprias.

O nível de dificuldade deste exercício, para os alunos, é difícil.

Enunciado:

O Pedro está a brincar com um dado. Qual a probabilidade de ele obter um 4 antes do 3º lançamento?
Apresenta o resultado em percentagem, arredondado com duas casa decimais.

- ☐ A probabilidade pedida é : 30.56%
- ☐ A probabilidade pedida é : 11.57%
- ☐ A probabilidade pedida é : 42.13%
- ☐ A probabilidade pedida é : 57.87%

Proposta de resolução:

Estamos perante um modelo Geométrico.

No modelo Geométrico, para a variável aleatória X e parâmetro p, a probabilidade de um determinado acontecimento é dada por:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} \times p, k \in \{1, 2, ...\}$$

onde k representa o número de experiências até obter sucesso.

Neste caso a probabilidade de ter sucesso (obter 4 no lançamento) é $\frac{1}{6}$.

Logo, a probabilidade de ter insucesso (não obter 4 no lançamento) é $\frac{5}{6}$.

Queremos saber qual a probabilidade de o Pedro obter 4, isto é, obter o primeiro sucesso, antes do 3º lançamento.

Designemos por X a variável aleatória associada a esta experiência, neste caso "contar o número de experiências até obter sucesso"

Para o Pedro obter 4 antes do 3º lançamento significa que poderá obter sucesso no 1º ou no 2º lançamento, isto é:

$$P(X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2)$$

Ora,

$$P(X = 1) = \left(\frac{5}{6}\right)^0 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 2) = \left(\frac{5}{6}\right)^1 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

então,

$$P(X < 3) = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} \approx 30.56\%$$

A probabilidade pedida é 30.56%.

Exercício **E97k50_ModProbabilidade_005** (ver código fonte na pág. 217):

Este exercício trabalha o cálculo de probabilidade numa distribuição de Poisson.

Foi parametrizada a variável correspondente ao número de clientes que param, por hora, na bomba de gasolina podendo tomar valores inteiros entre 4 e 6. A questão colocada é também parametrizada podendo ser apresentados dois tipos de questão: "Qual é a probabilidade de, em qualquer hora, $v2$ clientes pararem" ou "Qual é a probabilidade de, em qualquer hora, "$v4$ ou menos clientes pararem".

Este exercício aglomera várias combinações possíveis de resposta tendo surgido a necessidade de escolher um texto, na resolução, adequada à questão colocada, sendo a composição dos diferentes tipos de resposta o maior desafio, a nível informático.

O nível de dificuldade deste exercício, para os alunos, é médio.

Enunciado:

A experiência passada mostra que um número médio de 6 clientes por hora param para colocar gasolina numa bomba.
Qual é a probabilidade de, em qualquer hora, 2 ou menos clientes pararem?
Utiliza, para os cálculos intermédios, arredondamentos com um mínimo de quatro casas decimais.
Apresenta o resultado final arredondado às milésimas.

- ☐ A probabilidade pedida é: 0.002
- ☐ A probabilidade pedida é: 0.033
- ☐ A probabilidade pedida é: 0.014
- ☐ A probabilidade pedida é: 0.001

Proposta de resolução:

Estamos perante uma variável que representa o número de vezes que determinado fenómeno ocorre num dado período de tempo. O modelo de Poisson adapta-se a este tipo de situações.

Designemos por X a variável que representa o número de clientes que param, por hora, para abastecer gasolina, nesta bomba.

A probabilidade de k clientes pararem é dada por:

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}$$

Sabemos que o número médio de clientes é 6. Logo $\lambda = 6$.

Neste caso temos de determinar a soma de todas as probabilidades para $X \leq 2$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = e^{-6}\frac{6^0}{0!} + e^{-6}\frac{6^1}{1!} + e^{-6}\frac{6^2}{2!} = 25e^{-6} \simeq 0.002$$

A probabilidade pedida é 0.002.

Capítulo 5

Conclusão

"É um facto de que as novas tecnologias assumem hoje em dia uma dimensão inegável na sociedade, por isso, importa refletir sobre o lugar que elas ocupam e as novas funções que elas podem desempenhar. Ensinar com recurso a estas tecnologias pressupõe uma prática planeada e na qual os alunos têm novas formas de acesso ao conhecimento que poderão culminar em novas formas de aprendizagem" (Castro, E. et al , 2005).

A escola atual é uma miniatura da comunidade em que está inserida, refletindo em si a sociedade exterior nos seus mais variados aspetos. Sendo assim, as mudanças constantes e radicais que esta tem sofrido, mormente ao nível da evolução tecnológica, refletem-se necessariamente na escola e mais concretamente na forma como se ensina e na forma como se aprende.

O desafio imposto à escola por esta nova sociedade (da informação), apesar de natural e desejável, é imenso. Torna-se fundamental a introdução das tecnologias da informação e comunicação, em contextos escolares no sentido de os sistemas educativos rapidamente se atualizarem em direção à dita sociedade da informação.

Apesar disso, os intervenientes mais importantes e fundamentais na aprendizagem continuam a ser, sem dúvida, o saber, o aluno e o professor. O professor deve ser conhecedor do saber que quer transmitir, mas tem também de conhecer bem os seus alunos. Deve ser capaz de motivá-los, estimular a sua curiosidade e autonomia e potenciar o seu sucesso escolar.

Neste sentido, são cada vez mais os professores que recorrem a uma progressiva utilização das mais diversas ferramentas ligadas às tecnologias educativas para produzir materiais inovadores e para criar situações de efetiva aprendizagem.

Por outro lado, o aluno que frequenta a escola nos dias atuais passa horas infindáveis em frente de um ecrã de computador. Seria fundamental que este pudesse recorrer a estas tecnologias quer como sujeito passivo, com o intuito de recolher informação ou, muito mais importante, como sujeito ativo, com o intuito de ser um agente regulador da sua aprendizagem.

Com base nestas premissas e tendo em conta que o propósito desta dissertação foi a criação de recursos digitais de apoio ao ensino de Probabilidades, para a disciplina de MACS, o trabalho desenvolvido nesse sentido foi bastante profícuo. Permitiu ampliar o leque de exercícios parametrizados, de escolha múltipla, disponíveis aos alunos que frequentam esta disciplina.

No entanto, tendo em conta a caracterização da prova de exame final a que estes alunos estão sujeitos no final do 11.º ano, onde a tipologia dos itens apresentados é apenas de construção (resposta restrita e resposta extensa), e a resolução dos exercícios pode envolver, por exemplo, *"Interpretação de textos de Matemática"*, *"Apresentação de textos com conteúdos matemáticos de forma clara e organizada"*, *"Comunicação, por escrito, de conceitos, raciocínios e ideias, com clareza e rigor lógico"* [1] sugere-se que uma possível continuação do desenvolvimento deste trabalho possa ter estes pontos em atenção.

Propõe-se então, para futuro, a criação de exercícios para a disciplina de MACS, de resposta aberta, com a possibilidade de um único enunciado poder ser alvo de diferentes questões de forma a poder refletir *uma visão integradora e articulada dos diferentes conteúdos programáticos da disciplina*[2].

[1] Informação – Exame Final Nacional, Matemática Aplicada às Ciências Sociais – Instituto de Avaliação Educativa, I. P., dezembro de 2013

[2] idem

Bibliografia

Almeida, J. J, Smirnov, G., Brito, I., Pereira, R., Machado, G & Cia (2013), *E-studo: sistemas de ensino com geração automática de exercícios.*

Borba, M., C. & Penteado, M., G. (2001), *Informática e educação matemática*, Belo Horizonte: Autêntica.

Castro, E., Chavarria, F. & Morgado, C. (2005), *A importância das TIC no processo de desenvolvimento curricular.*

Cruz, J. P., Oliveira, P, Seabra, D. (2013), Crie o seu arquivo de exercícios resolvidos parametrizados. *Gazeta de Matemática*, n.º 170, p. 26.

Cruz, J. P., Oliveira, P, Seabra & D. (2011), Arquivo de exercícios parametrizados. *1.ª Conferência Ibérica de inovação em Educação com TIC.* Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança, Portugal.

ESTATCAMP (2014), *Valor esperado*, [Online; acedido em 12-outubro-2014]. em `http://www.portalaction.com.br/content/31-valor-esperado-de-variáveis-aleatórias-discretas`.

Farias, A. (2009), *Variáveis aleatórias contínuas*, Universidade Federal Fulminense, Instituto de Matemática, Departamento de Estatística.

Fernandes, E. M. (1999), *Estatística Aplicada*, Universidade do Minho, Braga.

Fernandes, J. A. (2014), Diferentes conceitos de probabilidade: exploração do conceito frequencista através da folha de cálculo. In *Seminário – Didática das Probabilidades*, Universidade de Aveiro, 19 maio 2014.

Instituto Superior de Agronomia, Departamento de Matemática (2006), *Exercícios de apoio às aulas práticas da disciplina Estatística.*

Kampff, A. J. C., Machado, J. C. & Cavedini, P. (2004), Novas tecnologias e educação matemática. *Revista RENOTE, Novas Tecnologias na Educação*, N.º2, Vol. 2, novembro 2004.

Livro Verde (1997), *Livro Verde para a Sociedade de Informação em Portugal*, Missão para a Sociedade da Informação em Portugal Sociedade Portuguesa de Estatística, 1.ª edição, Lisboa.

Longo E. & Branco I (2011), *Manual de MACS, 11.º ano*, Texto Editores, Lda..

Magalhães, M. N. (2011), *Probabilidade e variáveis aleatórias*, EdUSP, Brasil.

Martins, M. E. (2005), *Introdução à probabilidade e à estatística*, Departamento de Estatística e Investigação Operacional da FCUL Sociedade Portuguesa de Estatística.

Martins, M. E. (2014) Distribuição de probabilidades. *Revista de Ciência Elementar*, vol.2.

Ministério de Educação (2001), *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais*, Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Ministério da Educação (2002), *Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como?*, Ministério da Educação, Departamento do Ensino Básico.

Murteira, B, Ribeiro, C., S., Silva, J., A. & Pimenta, C. (2007), *Introdução à estatística*, McGraw-Hill, Portugal.

NCTM (2008), *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, APM.

Neves, M., Valente, F., Martins, M. J, & Mesquita, M. (1998), *Estatística*, Porto Editora, Porto, 1998.

Neves, M. A. F., Bolinhas, S. & Faria, L. (2011), *MACS 11.º ano*, Parte 2, Porto Editora, Porto, 2011.

Neves, M. A. F., Bolinhas, S. & Faria, L. (2011), *Matemática A 12.º ano, Probabilidade*, Porto Editora, Porto, 2012.

Oliveira, T. (1990) *Probabilidade e Estatística: Conceitos, Métodos e Aplicações*, Vol. I, McGraw-Hill, Lisboa.

Pinto, A. C. (2001) Factores relevantes na avaliação escolar por perguntas de escolha múltipla. *Psicologia, Educação e Cultura*, Faculdade de Psicologia e da Ciências da Educação, Universidade do Porto.

Ponte, J. P. (2002), O ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa?. In *Seminário "O ensino da Matemática: Situações e Perspectivas"*, Conselho Nacional de Educação, Lisboa, 28 novembro 2002.

Portoni, M. (2010), *Probabilidade, variáveis aleatórias, distribuições de probabilidade e geração aleatória - Conceitos sob a ótica de Avaliação de Desempenho de Sistemas*, Universidade Salvador, UNIFACS, Brasil.

Prensky, M. (2001), Digital Natives, Digital Immigrants part 1, *On the Horizon.*

Rocha, E. C. (1997), *Tecnologia: uso da Internet como ferramenta educacional.*

Rocha, I. (2013), *Mergulhar nas funções trigonométricas.* Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro, Portugal.

Seabra, D., Cruz, J. P. & Oliveira, P. (2013), *Reciclar material didático com o MEGUA*, [Online; acedido em 2-outubro-2014], em `http://mateas.wikidot.com/thread:reciclar-material-didatico-com-o-megua`.

Spiegel, M. R. (1977) *Probabilidades e Estatística*, McGraw-Hill, Lda., Lisboa.

Vairinhos, V. M. (1996), *Elementos de Probabilidades e Estatística*, Universidade Aberta, Portugal.

Apêndice A

Apêndice: Código Fonte

As secções que se seguem contém o código fonte que dá origem às concretizações descritas na secção 4.4. Algumas subsecções são intituladas “Escolha Múltipla” e agrupam exercícios que não pertencem às subsecções seguintes (quando existem).

Para cada exercício é apresentado o campo `%summary` contendo algum texto descritivo e palavras chave, o campo `%problem` contendo o enunciado e seus parâmetros, o campo `%answer` contendo a proposta de resolução que depende dos parâmetros e o parte da programação em linguagem Python a finalizar.

A.1 Operações com acontecimentos

A.1.1 Reunião de acontecimentos. Acontecimentos incompatíveis

E97K50_DefAxiomatica_001

%SUMMARY Probabilidade da reunião de acontecimentos. Acontecimentos incompatíveis

```
Este exercício trabalha a probabilidade da reunião de dois
acontecimentos quaisquer.

   SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(4731, 1)]
```

```
SIACUAend
```

%PROBLEM Probabilidade da reunião de dois acontecimentos. Acontecimentos incompatíveis

```
Seja $\Omega$ o espaço de resultados associado a uma experiência
aleatória .
   Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset
\Omega$). Sabe-se que $$P(A)=v1\%$$ $$P(A \cup B) = v2\%$$ $$\text{A e B são
incompatíveis}$$
   Qual o valor de P(B)?
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta\%$$ </choice>
   <choice>
$$errada1\%$$ </choice>
   <choice> $$errada2\%$$ </choice>
   <choice>
$$errada3\%$$ </choice>
   </multiplechoice>

   Se os acontecimentos A e B
são incompatíveis então a probabilidade da reunião de A com B é igual à soma das
probabilidades de A e B, isto é:
       $$P(A\cup B)= P(A)+P(B)$$.
Como:
           $$P(A\cup B)= v2\%$$ $$e$$ $$P(A)= v1\%$$
           temos

           $$v2\%=v1\%+P(B)\Leftrightarrow P(B)= v2\% - v1\%
\Leftrightarrow P(B)= vresposta\%$$
```

Programação

```
class E97K50_DefAxiomatica_001(Exercise):


    def make_random(s):
        s.v1 = ur.iunif(5,30)
        s.v2 = 80-s.v1


    def solve(s):
        s.vresposta= (s.v2-s.v1)
        #Opcoes Erradas
        s.errada1 = s.v1
        s.errada2 = s.v2
        s.errada3 = (s.v2+s.v1)
```

A.1.2 Probabilidade da reunião de acontecimentos. Acontecimentos contrários

E97K50_DefAxiomatica_002

%SUMMARY Operações com acontecimentos; Probabilidade da reunião de acontecimentos. Acontecimentos contrários

```
Este exercício trabalha a definição axiomática de Probabilidade.
SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts =
[(4732, 1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Probabilidade da reunião de dois acontecimentos

```
Seja $\Omega$ o espaço de resultados associado a uma experiência
aleatória.
   Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset
```

```
\Omega$).
   Sabe-se que: $$P(A)=v1$$ $$P(B)=v2$$ $$P(\overline A\cup B)=v3$$
Qual é o valor de $P(A\cup\overline B)$?
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresp$$ </choice>
   <choice> $$err1$$
</choice>
   <choice> $$err2$$ </choice>
   <choice> $$err3$$ </choice>
</multiplechoice>

   A resposta é $vresp$.
   A probabilidade da reunião de
dois acontecimentos é dada por $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$
   Neste caso
podemos dizer que $P(A\cup\overline B)=P(A)+P(\overline B)-P(A\cap\overline B).$
Sabemos também, pela propriedade da probabilidade do acontecimento contrário
que:
       $$P(\overline B)=1-P(B)$$

       Neste caso:
$$P(A\cup\overline B)=P(A)+P(\overline B)-P(A\cap\overline B)=$$
           $$=
P(A) + (1 - P(B)) - P(A\cap\overline B)=$$
           $$= v1 + (1 - v2) -
P(A\cap\overline B)=$$
           $$=v1 + 1 - v2 - P(A\cap\overline B)=$$
$$=v4 - P(A\cap\overline B)$$
           $\text{Mas } P(A\cap\overline B)= 1 -
P(\overline{A\cap\overline B})=1-P(\overline A \cup \overline{\overline B})=1-
P(\overline A \cup B)=1 - v3=v5.$
```

```
        $\text{ Assim:}$
$$P(A\cup\overline B)= v4 - v5 = r1$$
```

Programação

```
class E97K50_DefAxiomatica_002(Exercise):


    def make_random(s):
        s.v1 = ur.runif(0.2,0.6,2)
        s.v2 = ur.runif(0.1,0.5,2)
        vmin = max(1-s.v1,s.v2)
        s.pmin = vmin
        vmax = min(1,1-s.v1+s.v2)
        s.pmax = vmax
        s.v3 = ur.runif(vmin,vmax,2)
        s.v4 = s.v1 + 1 - s.v2
        s.v5 = 1 - s.v3
        cutpoint = vmin/(1-vmax+vmin)
        s.err1= ur.runif(0,1,2)
        if s.err1 <= cutpoint:
            s.err1 = s.err1*(1-vmax+vmin)
        else:
            s.err1 = s.err1*(1-vmax+vmin)+vmax-vmin
        s.err2= ur.runif(0,1,2)
        if s.err2 <= cutpoint:
            s.err2 = s.err2*(1-vmax+vmin)
        else:
            s.err2 = s.err2*(1-vmax+vmin)+vmax-vmin
        s.err3= ur.runif(0,1,2)
        if s.err3 <= cutpoint:
            s.err3 = s.err3*(1-vmax+vmin)
        else:
            s.err3 = s.err3*(1-vmax+vmin)+vmax-vmin
```

```
    def solve(s):
        s.vmin = max(1-s.v1,s.v2)
        s.vmax = min(1,1-s.v1+s.v2)
        s.r1 = s.v1-s.v2+s.v3
        s.vresp = s.r1
        s.err1 = -1*(s.v1-s.v2+s.v3)
        s.err2 = s.v1+s.v2+s.v3
        s.err3 = s.v3
```

A.1.3 Probabilidade da reunião de acontecimentos

E97K50_DefAxiomatica_003

%SUMMARY Operações com acontecimentos; Probabilidade da reunião de acontecimentos

```
Este exercício trabalha a probabilidade da reunião de dois
acontecimentos quaisquer.

   SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(4731, 1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Probabilidade da reunião de dois acontecimentos

```
Considere dois acontecimentos A e B com probabilidades $P(A)=rv1$ e
$P(B)=rv2$. De entre os valores seguintes o único que pode traduzir a
probabilidade da reunião $P(A\cup B)$  é:
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
```

```
   <choice> $$vresposta$$ </choice>
   <choice>
$$errada1$$ </choice>
   <choice> $$errada2$$ </choice>
   <choice> $$errada3$$
</choice>
   </multiplechoice>

   A resposta é $vresposta$.
   A
probabilidade da reunião de dois acontecimentos é dada por $P(A\cup
B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$
   Esta probabilidades está sempre compreendida entre
os seguintes valores:
       $$\max(P(A),P(B)) \leq P(A\cup B) \leq P(A)+P(B)$$
Neste caso $$\max(rv1,rv2) \leq P(A\cup B)\leq rv1 + rv2 \;\;\;
\Leftrightarrow$$
   $$pmin \leq P(A\cup B)\leq pmax.$$
   O único valor
compreendido neste intervalo é vresposta.
```

Programação

```
class E97K50_DefAxiomatica_003(Exercise):

    def make_random(s):
        s.rv1 = ur.runif(0.2,0.6,2)
        s.rv2 = ur.runif(0.1,0.5,2)
        vmin = max(s.rv1,s.rv2)
        s.pmin = vmin
        vmax = min(1,s.rv1+s.rv2)
        s.pmax = vmax
        s.probreun = ur.runif(vmin,vmax,2)
        cutpoint = vmin/(1-vmax+vmin)
```

```
        s.err1= ur.runif(0,1,2)
        if s.err1 <= cutpoint:
            s.err1 = s.err1*(1-vmax+vmin)
        else:
            s.err1 = s.err1*(1-vmax+vmin)+vmax-vmin
        s.err2= ur.runif(0,1,2)
        if s.err2 <= cutpoint:
            s.err2 = s.err2*(1-vmax+vmin)
        else:
            s.err2 = s.err2*(1-vmax+vmin)+vmax-vmin
        s.err3= ur.runif(0,1,2)
        if s.err3 <= cutpoint:
            s.err3 = s.err3*(1-vmax+vmin)
        else:
            s.err3 = s.err3*(1-vmax+vmin)+vmax-vmin

    def solve(s):
        s.vresposta= s.probreun
        #Opcoes Erradas
        s.errada1 = round(s.err1,2)
        s.errada2 = round(s.err2,2)
        s.errada3 = round(s.err3,2)
```

A.2 Regra de Laplace

A.2.1 Regra de Laplace. Tabela de dupla entrada (1)

E97K50_Laplace_001

%SUMMARY Regra de Laplace

```
SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
```

discr=0.3

concepts = [(4731, 1)]

SIACUAend

%PROBLEM Números Bolas e Caixas

Considera uma caixa com v1 bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a v1.

Considera também um dado equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6. Lança-se o dado e tira-se, ao acaso, uma bola da caixa.

Qual é a probabilidade de os números saídos serem ambos menores que v2?

%ANSWER

<multiplechoice>

<choice> $$vresp$$ </choice>

<choice> $$err1$$ </choice>

<choice> $$err2$$ </choice>

<choice> $$err3$$ </choice>

</multiplechoice>

A resposta é $vresp$.

 Pretendemos saber a probabilidade de os números obtidos serem ambos menores que v2.

 Para determinar a probabilidade pedida utilizaremos a Regra de Laplace $$P(\text{ambos os números menores que v2})=\frac{\text{nº de casos favoráveis}}{\text{nº de casos possíveis}}$$

Comecemos por construir uma tabela que nos permita verificar todas as hipóteses possíveis de resultado:

```
$$\begin{array}{|a|a|c|c|c|c|c|}
       \hline
       B/D & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 &
6\\ \hline


       linhas
       \end{array}$$


   A caixa tem v1
bolas numeradas de 1 a v1 e o dado tem 6 faces também numeradas de 1 a 6. Logo:
$$\text{O número de casos possíveis é dado por: } v1 \times 6 = v3$$
Pretendemos saber a probabilidade de, ao retirar uma bola do saco e lançar o
dado, obter dois numeros menores que v2.<br>
   <br> Pela tabela podemos
verificar que
       $$\text{O número de casos favoráveis é } cf$$
Logo a probabilidade pedida é dada por:
       $$P(\text{ambos os números
menores que v2}) = \frac{cf}{cp} = vresp$$
```

Programação

```
class E97K50_Laplace_001(Exercise):


    def make_random(s):


        s.v1 = ur.iunif(6,10)
        s.v2 = ur.iunif(2,s.v1)
    def solve(s):
        #d={1:0,2:1,3:4,4:9,5:16,6:25,7:36}
        if s.v2<=7:
            s.cf = (s.v2-1)^2
        else:
            s.cf = 36 + 6*(s.v2 - 7)
```

```
        s.cp = 6*s.v1
        #s.cf = d[s.v1]
        s.vresp= round(s.cf/s.cp,2)

        s.linhas = ""
        for i in range(s.v1):
            linha = str(i+1)
            for j in range(6):
                linha = linha + s.C(i+1,j+1)
            s.linhas = s.linhas + linha + r" \\ \hline"
        s.v3 = s.v1 * 6

        #Opcoes Erradas
        s.err1 = round(s.vresp*0.9,2)
        s.err2 = round(s.vresp*1.2,2)
        s.err3 = round(s.vresp*1.3,2)

    def C(s,B,D):
        if B < s.v2 and D < s.v2:
            return '&(%d,%d)' % (B,D)
        else:
            return '& '
```

A.2.2 Regra de Laplace

E97K50_Laplace_002

%SUMMARY Probabilidade; Regra de Laplace

```
Este exercício é um problema básico de Regra de Laplace
SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
```

concepts =
[(4731, 1)]
SIACUAend

%PROBLEM Exemplo

A Maria gravou v1 CD, v2 de música rock e v3 com música popular, mas esqueceu-se de identificar cada um deles.
Qual é a probabilidade de ao escolher dois CD ao acaso, um ser de música rock e o outro ser de música popular?

%ANSWER

<multiplechoice>
<choice> $$vresposta$$ </choice>
<choice>
$$errada1$$ </choice>
<choice> $$errada2$$ </choice>
<choice> $$errada3$$
</choice>
</multiplechoice>

A resposta é $vresposta$.
Utilizaremos a Regra de Laplace
$$p(A)=\frac{\text{nº de casos
favoráveis}}{\text{nº de casos possíveis}}$$
Nº de casos possíveis:
$v1\times(v1-1)=cp$

Nº de casos favoráveis: $2\times v2\times v3=cf$
$$P(A)=\frac{cf}{cp}=vresposta$$

Programação

```
class E97K50_Laplace_002(Exercise):

    def make_random(s):
        s.v1 = ur.iunif(5,15)
        s.v2 = ur.iunif(1,s.v1-2)
        s.v3 = s.v1-s.v2
    def solve(s):
        s.cp=s.v1*(s.v1-1)
        s.cf=2*s.v2*s.v3
        s.vresposta = s.cf/s.cp

        #Opcoes Erradas
        s.errada1 = s.cp/s.cf
        s.errada2 = s.v1*s.v1/s.cp
        s.errada3 = s.cf/(s.cp/2)
```

A.2.3 Regra de Laplace. Tabela de dupla entrada (2)

E97K50_Laplace_003

%SUMMARY Probabilidade; Regra de Laplace

```
Este exercício é um problema básico de Regra de Laplace
SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts =
[(4731, 1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Lançam-se dois dados equilibrados. Anotam-se a quantidade de pintas
que saem na face voltada para cima.
```

```
   Qual é a probabilidade de a soma das
pintas obtida ser igual a v1?
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresposta$$ </choice>
   <choice>
$$errada1$$ </choice>
   <choice> $$errada2$$ </choice>
   <choice> $$errada3$$
</choice>
   </multiplechoice>

   A resposta é $vresposta$.<br>
Pretendemos saber a probabilidade de obter v1 na soma das pintas dos dois
dados.<br>

   Seja, então, o acontecimento $$A = \text``soma obtida nos dois
dados''$$
   Para determinar a probabilidade pedida utilizaremos a Regra de
Laplace
   $$P(A)=\frac{\text{nº de casos favoráveis}}{\text{nº de casos
possíveis}}$$

   Comecemos por construir uma tabela que nos permita
verificar todas as hipóteses possíveis de resultado da soma:<br>
<center>
   <latex 100%>
       \begin{tabular}{|l||l|l|l|l|l|l|}
       \hline
\hline
       ~ & 1 & 2 & 3 & 4  & 5  & 6  \\ \hline \hline
       1 & 2 & 3 & 4
```

```
& 5  & 6  & 7  \\ \hline
       2 & 3 & 4 & 5 & 6  & 7  & 8  \\ \hline
       3
& 4 & 5 & 6 & 7  & 8  & 9  \\ \hline
       4 & 5 & 6 & 7 & 8  & 9  & 10 \\
\hline
       5 & 6 & 7 & 8 & 9  & 10 & 11 \\ \hline
       6 & 7 & 8 & 9 & 10 &
11 & 12 \\ \hline
       \hline
       \end{tabular}
       \vspace{5mm}
</latex>
   </center>

   O número total de pares de lançamentos possíveis e equiprováveis de casos possíveis
    é dado por:
$6\times6=cp$<br>




   Verificamos que a soma pretendida (v1) se
encontra numa diagonal. O número de casos favoráveis é cf, logo:
$$P(A)=\frac{cf}{cp}=vresposta$$
```

Programação

```
class E97K50_Laplace_003(Exercise):

        #http://truben.no/latex/table/

        def make_random(s):
             s.v1 = ur.iunif(2,12)

```

```
    def solve(s):
        d={2:1,3:2,4:3,5:4,6:5,7:6,8:5,9:4,10:3,11:2,12:1}
        s.cp=36
        s.cf=d[s.v1]



        s.vresposta = s.cf/s.cp

        #Opcoes Erradas
        s.errada1 = s.cp/s.cf
        s.errada2 = s.v1/s.cp
        s.errada3 = s.v1
```

A.3 Probabilidade condicionada

A.3.1 Probabilidade condicionada. Definição

E97K50_ProbCondicionada_001

%SUMMARY Probabilidade condicionada

```
SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
concepts = [(4732, 1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Probabilidade condicionada

```
Num teste de Matemática uma questão de escolha múltipla tem v1
alternativas. Da turma, v2% dos alunos sabem resolver a questão. Os restantes
respondem sem saber, "à sorte".
   Um aluno é escolhido ao acaso. Qual é a
probabilidade de não saber a resposta, isto é, ter respondido "à sorte", sabendo
```

que acertou a questão?

%ANSWER

<multiplechoice>

<choice> $$vresp$$ </choice>

<choice> $$err1$$

</choice>

<choice> $$err2$$ </choice>

<choice> $$err3$$ </choice>

</multiplechoice>

A resposta é $vresp$.

A probabilidade que se
pretende determinar é:
$$P(\text{não sabe}|\text{acerta}) =
\frac{P(\text{não sabe} \cap \text{acerta})}{P(\text{acerta})}$$

Ora,
$$P(\text{acerta}) = P(\text{acerta} \cap \text{sabe}) + P(\text{acerta} \cap
\text{não sabe})$$

Se $$P(\text{acerta} \cap \text{sabe}) =
P(\text{sabe})\times P(\text{acerta}|\text{sabe})= \frac{v2}{100} \times 1 =
r1,$$

e se $$P(\text{acerta} \cap \text{não sabe}) = P(\text{não
sabe})\times P(\text{acerta}|\text{não sabe})= \left(1-\frac{v2}{100}\right)
\times \frac{1}{v1} = r4 \times \frac{1}{v1} = r2$$

podemos dizer que:
$$P(\text{acerta})= r1 + r2 = r3$$

```
   Sendo assim, podemos afirmar que:
$$P(\text{não sabe}|\text{acerta})= \frac{P(\text{não sabe} \cap
\text{acerta})}{P(\text{acerta})}=$$
       $$= \frac{r2}{r1+r2} =
\frac{r2}{r3}=r5$$
```

Programação

```
class E97K50_ProbCondicionada_001(Exercise):

        def make_random(s):

            s.v1 = ur.iunif(4,6)
            s.v2 = ur.iunif(30,70)

        def solve(s):

            s.r1 = s.v2/100
            s.r2 = (1-s.v2/100)*1/s.v1
            s.r3 = s.r1+s.r2
            s.r4 = 1-s.v2/100
            s.r5 = s.r2/s.r3
            s.vresp = s.r5



            #Respostas Erradas (# = comentario)
            s.err1 = ((1-s.v2/100)*s.v1)/(s.r1+(1-s.v2/100)*s.v1)
            s.err2 = ((s.v2/100)*s.v1)/(s.r1+(s.v2/100)*s.v1)
            s.err3 = s.r2/(s.r1*s.r2)
```

A.3.2 Tabela de contingência

E97K50_ProbCondicionada_002

%SUMMARY Probabilidade; Probabilidade condicionada

```
SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
concepts = [(4732, 1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Probabilidade condicionada

```
Numa turma de uma escola secundária, a distribuição dos alunos por
idade e por sexo é a seguinte:

   <center>
   <latex 100%>
\begin{tabular}{||l||l|l|l|l|l|l|}
       \hline
       \hline
       ~ &
Rapazes & Raparigas \\ \hline \hline
       16 anos & v1 & v2 \\ \hline
17 anos & v3 & v4 \\ \hline
       \end{tabular}
       \vspace{5mm}
</latex>
   </center>
   Escolhe-se ao acaso um aluno dessa turma.
Qual é a probabilidade de o aluno escolhido ter anoX@c{"16 anos","17 anos"}
sabendo que é sexoX@c{"rapaz","rapariga"}?
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresp$$ </choice>
   <choice> $$err1$$
```

```
</choice>
   <choice> $$err2$$ </choice>
   <choice> $$err3$$ </choice>
</multiplechoice>

   A resposta é $vresp$.
   Pela definição de
probabilidade condicionada temos:
       $$P(anoT|sexoT)= \frac{P(anoT\cap
sexoT)}{P(sexoT)}$$

       Assim:
           $$P(anoT|sexoT)=
\frac{P(anoT\cap sexoT)}{P(sexoT)} = \frac{P(anoT\cap sexoT)}{P(\text{16 anos})
\times P(sexoT|\text{16 anos})+ P(\text{17 anos}) \times P(sexoT|\text{17
anos})}$$

   <showone caso>
   <thisone Probabilidade de ter 16 anos
e ser rapaz>
   $$\frac{P(\text{16 anos} \cap \text{rapaz})}{P(\text{rapaz})} =
\frac{\frac{v1}{totalX}}{\frac{v1}{totalX}+\frac{v3}{totalX}} = \frac{v1}{v1+v3}
= vresp$$
   </thisone>

   <thisone Probabilidade de ter 16 anos
e ser rapariga>
   $$\frac{P(\text{16 anos} \cap
\text{rapariga})}{P(\text{rapariga})} =
\frac{\frac{v2}{totalX}}{\frac{v2}{totalX}+\frac{v4}{totalX}} = \frac{v2}{v2+v4}
= vresp$$
   </thisone>
```

```
<thisone Probabilidade de ter 17 anos e ser
rapaz>
$$\frac{P(\text{17 anos} \cap \text{rapaz})}{P(\text{rapaz})} =
\frac{\frac{v3}{totalX}}{\frac{v1}{totalX}+\frac{v3}{totalX}} = \frac{v3}{v1+v3}
= vresp$$
</thisone>

<thisone Probabilidade de ter 17 anos e ser
rapariga>
$$\frac{P(\text{17 anos} \cap \text{rapariga})}{P(\text{rapariga})}
= \frac{\frac{v4}{totalX}}{\frac{v2}{totalX}+\frac{v4}{totalX}} =
\frac{v4}{v2+v4} = vresp$$
</thisone>

</showone>
```

Programação

```
class E97K50_ProbCondicionada_002(Exercise):

    def make_random(s):
        s.v1 = ur.iunif(8,12)
        s.v2 = ur.iunif(4,8)
        s.v3 = ur.iunif(3,6)
        s.v4 = 28-s.v1-s.v2-s.v3
        s.totalX = s.v1 + s.v2+ s.v3 + s.v4
        s.anoX = ur.iunif(0,1)
        s.sexoX = ur.iunif(0,1)
        s.anoT = ["16 anos","17 anos"][s.anoX]
        s.sexoT = ["rapaz","rapariga"][s.sexoX]
        s.caso = s.anoX * 2  + s.sexoX

    def solve(s):
        if s.caso==0:
```

```
        s.vresp = s.v1/(s.v1+s.v3)
        s.err1 = s.v1
        s.err2 = s.v1/28
        s.err3 = s.v1/(s.v3+s.v4)
    elif s.caso==1:
        s.vresp = s.v2/(s.v2+s.v4)
        s.err1 = s.v2
        s.err2 = s.v2/28
        s.err3 = s.v2/(s.v1+s.v2)
    elif s.caso==2:
        s.vresp = s.v3/(s.v1+s.v3)
        s.err1 = s.v3
        s.err2 = s.v3/28
        s.err3 = s.v3/(s.v3+s.v4)
    elif s.caso==3:
        s.vresp = s.v4/(s.v2+s.v4)
        s.err1 = s.v4
        s.err2 = s.v4/28
        s.err3 = s.v4/(s.v1+s.v2)
```

A.4 Regra Bayes

A.4.1 Árvore de probabilidades. Probabilidade condicionada

E97K50_RegraBayes_001

%SUMMARY Probabilidade; Regra Bayes

```
Exemplo de exercício com árvore de probabilidades.

   SIACUAstart
level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
```

```
   concepts = [(4734, 1)]
SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Numa escola secundária, sabe-se que têm dificuldade a Matemática v1%
dos alunos do 12.º ano, v2% dos alunos do 11.º ano e v3% do 10.º ano.
   Sabe-se
ainda que v4% dos estudantes frequentam o 10.º ano, v5% o 11.º ano e v6% o 12.º
ano.
   Seleciona-se um estudante ao acaso.
   Determina a probabilidade que
frequente o v10.º ano, sabendo que tem dificuldade a Matemática.<br>
   Apresenta
o resultado arredondado com duas casas decimais.
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice>$$vresp\simeq vrespap$$</choice>
<choice>$$errada1\simeq errada1ap$$</choice>
   <choice>$$errada2\simeq
errada2ap$$</choice>
   <choice>$$errada3\simeq errada3ap$$</choice>
</multiplechoice>

   $$\text{O exercício pode ser resolvido utilizando a
Regra de Bayes}$$
   $$\text {Sendo D: o aluno tem dificuldade a
matemática}$$
   $$P(v10º|D)=\frac{P(D|v10º)\times P(v10º)}{P(D)}=
\frac{P(v10º\cap D)}{P(D)}$$

   <latex 100%>
```

```
   % Set the overall layout
of the tree
   \tikzstyle{level 1}=[level distance=3.5cm, sibling
distance=3.5cm]
   \tikzstyle{level 2}=[level distance=3.5cm, sibling
distance=2cm]

   % Define styles for bags and leafs
   \tikzstyle{bag} =
[text width=4em, text centered]
   \tikzstyle{end} = [circle, minimum
width=3pt,fill, inner sep=0pt]

   % The sloped option gives rotated edge
labels. Personally
   % I find sloped labels a bit difficult to read. Remove the
sloped options
   % to get horizontal labels.
\begin{tikzpicture}[grow=right, sloped]
   \node[bag] {Ano}
       child {
node[bag] {Matemática}
               child {
node[end, label=right:
                       {$P(12º\cap
\overline{D})=\frac{v6}{100}\cdot\frac{v7}{100}=s1$}] {}
                   edge
from parent
                   node[above] {$\overline{D}$}
node[below]  {$\frac{v7}{100}$}
               }
               child {
node[end, label=right:
```

```
                        {$P(12º\cap
D)=\frac{v6}{100}\cdot\frac{v1}{100}=s2$}] {}
                    edge from
parent
                    node[above] {$D$}
                    node[below]
{$\frac{v1}{100}$}
                }
                edge from parent
node[above] {$12º$}
                node[below]  {$\frac{v6}{100}$}
       }
child {
           node[bag] {Matemática}
               child {
node[end, label=right:
                        {$P(11º\cap
\overline{D})=\frac{v5}{100}\cdot\frac{v8}{100}=s3$}] {}
                    edge
from parent
                    node[above] {$\overline{D}$}
node[below]  {$\frac{v8}{100}$}
                }
                child {
node[end, label=right:
                        {$P(11º\cap
D)=\frac{v5}{100}\cdot\frac{v2}{100}=s4$}] {}
                    edge from
parent
                    node[above] {$D$}
                    node[below]
{$\frac{v2}{100}$}
                }
```

```
               edge from parent
node[above] {$11º$}
               node[below]  {$\frac{v5}{100}$}
       }
child {
           node[bag] {Matemática}
           child {
node[end, label=right:
                       {$P(10º\cap
\overline{D})=\frac{v9}{100}\cdot\frac{v4}{100}=s5$}] {}
                   edge
from parent
                   node[above] {$\overline{D}$}
node[below]  {$\frac{v9}{100}$}
               }
               child {
node[end, label=right:
                       {$P(10º\cap
D)=\frac{v4}{100}\cdot\frac{v3}{100}=s6$}] {}
                   edge from
parent
                   node[above] {$D$}
                   node[below]
{$\frac{v3}{100}$}
               }
           edge from parent
node[above] {$10º$}
               node[below]  {$\frac{v4}{100}$}
       };
\end{tikzpicture}

   </latex>
   $$P(v10º|D)=\frac{P(D|v10º)\times
```

```
P(v10º)}{P(D)}= \frac{P(v10º\cap D)}{P(D)}$$
   $$\frac{P(v10º\cap D)}{P(D)}=
\frac{P(v10º\cap D)}{P(10º)\times P(D|10º)+P(11º)\times P(D|11º)+P(12º)\times
P(D|12º)}$$
   $$\frac{P(v10º\cap D)}{P(D)}= \frac{P(v10º\cap D)}{s6+s4+s2}$$
<showone v10a>
   <thisone Probabilidade de frequentar o 10 ano>
$$\frac{P(v10º\cap D)}{P(D)}= \frac{s6}{s6+s4+s2}=vresp \simeq vrespap$$
</thisone >
   <thisone Probabilidade de frequentar o 11 ano>
$$\frac{P(v10º\cap D)}{P(D)}= \frac{s4}{s6+s4+s2}=vresp \simeq vrespap$$
</thisone >
   <thisone Probabilidade de frequentar o 12 ano>
$$\frac{P(v10º\cap D)}{P(D)}= \frac{s2}{s6+s4+s2}=vresp \simeq vrespap$$
</thisone >
   </showone>
```

Programação

```
class E97K50_RegraBayes_001(Exercise):


    def make_random(s):
        s.v1 = ur.iunif(5,20)#colocar aqui as variaveis do problema
        s.v2 = ur.iunif(5,20)
        s.v3 = ur.iunif(5,20)
        s.v4 = ur.iunif(20,30)
        s.v5 = ur.iunif(20,30)
        s.v6 = 100-(s.v5+s.v4)
        s.v7 = 100 - s.v1
        s.v8 = 100 - s.v2
        s.v9 = 100 - s.v3
        s.v10 = ur.iunif(10,12)
        s.v10a= s.v10-10
    def solve(s):
```

```
        s.s6 = (s.v4/100)*(s.v3/100)
        s.s5 = (s.v4/100)*(s.v9/100)
        s.s4 = (s.v5/100)*(s.v2/100)
        s.s3 = (s.v5/100)*(s.v8/100)
        s.s2 = (s.v6/100)*(s.v1/100)
        s.s1 = (s.v6/100)*(s.v7/100)
        if s.v10 == 10:
            s.vresp = s.s6/(s.s6+s.s4+s.s2)
            s.errada1 = (s.s6+s.s4+s.s2)/s.s6
            s.errada1ap = round(s.errada1,2)
            s.errada2 = s.s6
            s.errada2ap = round(s.errada2,2)
            s.errada3 = s.s6/(s.s6+s.s4)
            s.errada3ap = round(s.errada3,2)
        elif s.v10 == 11:
            s.vresp = s.s4/(s.s6+s.s4+s.s2)
            s.errada1 = (s.s6+s.s4+s.s2)/s.s4
            s.errada1ap = round(s.errada1,2)
            s.errada2 = s.s4
            s.errada2ap = round(s.errada2,2)
            s.errada3 = s.s4/(s.s6+s.s4)
            s.errada3ap = round(s.errada3,2)
        else:
            s.vresp = s.s2/(s.s6+s.s4+s.s2)
            s.errada1 = (s.s6+s.s4+s.s2)/s.s2
            s.errada1ap = round(s.errada1,2)
            s.errada2 = s.s2
            s.errada2ap = round(s.errada2,2)
            s.errada3 = s.s2/(s.s2+s.s4)
            s.errada3ap = round(s.errada3,2)
        s.vrespap = round(s.vresp,2)
```

A.4.2 Árvore de probabilidades

E97K50_RegraBayes_002

%SUMMARY Probabilidade; Regra Bayes

Exemplo de exercício com árvore de probabilidades.

SIACUAstart

level=1

slip=0.2

guess=0.25

discr=0.3

concepts = [(4732, 1)]

SIACUAend

%PROBLEM Exemplo

A caixa I contém v1 bolas brancas e v2 bolas pretas; a caixa II contém v3 bolas brancas e v4 bolas pretas; a caixa III contém v5 bolas brancas e v6 bolas pretas.

Escolhe-se uma caixa ao acaso e extrai-se uma bola: é bolaX@c{"branca","preta"}. Qual é a probabilidade de ter sido escolhida da caixaX@c{"Caixa I","Caixa II","Caixa III"}?

Apresenta o resultado em forma de fração.

%ANSWER

<multiplechoice>

<choice>$$vresp$$</choice>

<choice>$$err1$$</choice>

<choice>$$err2$$</choice>

<choice>$$err3$$</choice>

</multiplechoice>

$$\text{O exercício pode

```
ser resolvido utilizando a Regra de Bayes e um Diagrama de Árvore}$$
$$P(caixaT|bolaT)=\frac{P(bolaT|caixaT)\times P(caixaT)}{P(bolaT)}=
\frac{P(caixaT\cap bolaT)}{P(bolaT)}$$

   <latex 100%>

   % Set the
overall layout of the tree
   \tikzstyle{level 1}=[level distance=3.5cm, sibling
distance=3.5cm]
   \tikzstyle{level 2}=[level distance=3.5cm, sibling
distance=2cm]

   % Define styles for bags and leafs
   \tikzstyle{bag} =
[text width=4em, text centered]
   \tikzstyle{end} = [circle, minimum
width=3pt,fill, inner sep=0pt]

   % The sloped option gives rotated edge
labels. Personally
   % I find sloped labels a bit difficult to read. Remove the
sloped options
   % to get horizontal labels.
\begin{tikzpicture}[grow=right, sloped]
   \node[bag] {Caixa}
       child {
node[bag] {Bolas}
               child {
                   node[end,
label=right:
                         {$P(III\cap
Pr)=\frac{1}{3}\cdot\frac{v6}{v11}=s1$}] {}
```

```
                    edge from parent
node[above] {$Pr$}
                    node[below]  {$\frac{v6}{v11}$}
}
                child {
                    node[end, label=right:
{$P(III\cap Br)=\frac{1}{3}\cdot\frac{v5}{v11}=s2$}] {}
                    edge
from parent
                    node[above] {$Br$}
                    node[below]
{$\frac{v5}{v11}$}
                }
                edge from parent
node[above] {$III$}
                node[below]  {$\frac{1}{3}$}
       }
child {
            node[bag] {Bolas}
                child {
node[end, label=right:
                        {$P(II\cap
\Pr)=\frac{1}{3}\cdot\frac{v4}{v10}=s3$}] {}
                    edge from parent
node[above] {$Pr$}
                    node[below]  {$\frac{v4}{v10}$}
}
                child {
                    node[end, label=right:
{$P(II\cap Br)=\frac{1}{3}\cdot\frac{v3}{v10}=s4$}] {}
                    edge
from parent
                    node[above] {$Br$}
```

```
                   node[below]
{$\frac{v3}{v10}$}
               }
               edge from parent
node[above] {$II$}
               node[below]  {$\frac{1}{3}$}
       }
child {
           node[bag] {Bolas}
           child {
node[end, label=right:
                       {$P(I\cap
\Pr)=\frac{1}{3}\cdot\frac{v2}{v9}=s5$}] {}
                   edge from parent
node[above] {$Pr$}
                   node[below]  {$\frac{v2}{v9}$}
}
               child {
                   node[end, label=right:
{$P(I\cap Br)=\frac{1}{3}\cdot\frac{v1}{v9}=s6$}] {}
                   edge
from parent
                   node[above] {$Br$}
                   node[below]
{$\frac{v1}{v9}$}
               }
           edge from parent
node[above] {$I$}
               node[below]  {$\frac{1}{3}$}
       };
\end{tikzpicture}

   </latex>
```

```
$$P(caixaT|bolaT)=\frac{P(bolaT|caixaT)\times P(caixaT)}{P(bolaT)}=
\frac{P(caixaT\cap bolaT)}{P(bolaT)}$$

   $$
   \frac{P(caixaT\cap
bolaT)}{P(bolaT)} =
   \frac{P(caixaT\cap bolaT)}{P(\text{Caixa I}) \times
P(bolaT|\text{Caixa I})+P(\text{Caixa II})\times P(bolaT|\text{Caixa II}) +
P(\text{Caixa III})\times P(bolaT|\text{Caixa III})}
   $$

   <showone caso>
<thisone Probabilidade de ter saído Caixa I e Bola Branca>
$$\frac{P(\text{Caixa I} \cap \text{Branca})}{P(\text{Branca})}=
\frac{s6}{s6+s4+s2}= vresp$$
   </thisone >

   <thisone Probabilidade de
ter saído Caixa I e Bola Preta>
   $$\frac{P(\text{Caixa I} \cap
\text{Preta})}{P(\text{Preta})}= \frac{s5}{s5+s3+s1}= vresp$$
   </thisone >
<thisone Probabilidade de ter saído Caixa II e Bola Branca>
$$\frac{P(\text{Caixa II} \cap \text{Branca})}{P(\text{Branca})}=
\frac{s4}{s6+s4+s2}= vresp$$
   </thisone >

   <thisone Probabilidade de
ter saído Caixa II e Bola Preta>
   $$\frac{P(\text{Caixa II} \cap
\text{Preta})}{P(\text{Preta})}= \frac{s3}{s5+s3+s1}= vresp$$
   </thisone >
<thisone Probabilidade de ter saído Caixa III e Bola Branca>
```

```
$$\frac{P(\text{Caixa III} \cap \text{Branca})}{P(\text{Branca})}=
\frac{s2}{s6+s4+s2}= vresp$$
   </thisone >

   <thisone Probabilidade de
ter saído Caixa III e Bola Preta>
   $$\frac{P(\text{Caixa III} \cap
\text{Preta})}{P(\text{Preta})}= \frac{s1}{s5+s3+s1}= vresp$$
   </thisone >
</showone>
```

Programação

```
class E97K50_RegraBayes_002(Exercise):

        def make_random(s):
            s.v1 = ur.iunif(2,5)#colocar aqui as variaveis do problema
            s.v2 = ur.iunif(4,6)
            s.v3 = ur.iunif(3,5)
            s.v4 = ur.iunif(1,3)
            s.v5 = ur.iunif(2,4)
            s.v6 = ur.iunif(1,6)
            s.v8 = ur.iunif(1,3)
            s.v9 = s.v1+s.v2
            s.v10 = s.v3+s.v4
            s.v11 = s.v5+s.v6
            s.caixaX = ur.iunif(0,2)
            s.bolaX = ur.iunif(0,1)
            s.caixaT = ["Caixa I","Caixa II","Caixa III"][s.caixaX]
            s.bolaT = ["Branca","Preta"][s.bolaX]
            s.caso = s.caixaX*2+s.bolaX

        def solve(s):
```

```
        s.s6 = (1/3)*(s.v1/s.v9)
        s.s5 = (1/3)*(s.v2/s.v9)
        s.s4 = (1/3)*(s.v3/s.v10)
        s.s3 = (1/3)*(s.v4/s.v10)
        s.s2 = (1/3)*(s.v5/s.v11)
        s.s1 = (1/3)*(s.v6/s.v11)
        if s.caso==0:
            s.vresp = s.s6/(s.s6+s.s4+s.s2)
            s.err1 = s.s6
            s.err2 = s.s6/(s.s6*s.s4*s.s2)
            s.err3 = s.s6/(s.s6+s.s4+s.s2)/3
        elif s.caso==1:
            s.vresp = s.s5/(s.s5+s.s3+s.s1)
            s.err1 = s.s5
            s.err2 = s.s5/(s.s5*s.s3*s.s1)
            s.err3 = s.s5/(s.s5+s.s3+s.s1)/3
        elif s.caso==2:
            s.vresp = s.s4/(s.s6+s.s4+s.s2)
            s.err1 = s.s4
            s.err2 = s.s4/(s.s6*s.s4*s.s2)
            s.err3 = s.s4/(s.s6+s.s4+s.s2)/3
        elif s.caso==3:
            s.vresp = s.s3/(s.s5+s.s3+s.s1)
            s.err1 = s.s3
            s.err2 = s.s3/(s.s5*s.s3*s.s1)
            s.err3 = s.s3/(s.s5+s.s3+s.s1)/3
        elif s.caso==4:
            s.vresp = s.s2/(s.s6+s.s4+s.s2)
            s.err1 = s.s2
            s.err2 = s.s2/(s.s6*s.s4*s.s2)
            s.err3 = s.s2/(s.s6+s.s4+s.s2)/3
        elif s.caso==5:
            s.vresp = s.s1/(s.s5+s.s3+s.s1)
```

```
            s.err1 = s.s1
            s.err2 = s.s1/(s.s5*s.s3*s.s1)
            s.err3 = s.s1/(s.s5+s.s3+s.s1)/3
```

A.5 Diagrama de Venn

A.5.1 Construção do Diagrama de Venn. Probabilidade condicionada

E97K50_DiagramaVenn_001

```
%SUMMARY Probabilidade Condicional (Diagrama de Venn)

Este exercício trabalha a utilização do Diagrama de Venn no cálculo
de probabilidade condicional.
http://www.texample.net/tikz/examples/tag/diagrams/

   SIACUAstart
level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(4732, 1)]
SIACUAend

%PROBLEM Probabilidade da Probabilidade Condicional e Diagrama de Venn

Seja $\Omega$ o espaço de resultados associado a uma certa
experiência aleatória.
   Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subseteq \Omega$
e $B \subseteq \Omega$).
   Tem-se que:
       $$P(A)=v1\%$$
       $$P(A \cap
B)=v4\%$$
       $$P(A \cup B)=v3\%$$
       Utiliza o Diagrama de Venn e
```

```
determina o valor da probabilidade condicional $P(A|B)$. Apresenta o resultado
em percentagem, arredondado com duas casas decimais.
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> <center> $P(A|B)=rc1\%$ <br> <latex
100%> figresp </latex>  </center> </choice>
   <choice> <center> $P(A|B)=re1\%$
<br> <latex 100%> figerr1 </latex>   </center> </choice>
   <choice> <center>
$P(A|B)=re2\%$ <br> <latex 100%> figerr2 </latex>   </center> </choice>
<choice> <center> $P(A|B)=re3\%$ <br> <latex 100%> figerr3 </latex>  </center>
</choice>
   </multiplechoice>

   A resposta é <latex 100%> figresp </latex>
<br> $P(A|B)=rc1\%$ <br>
   <br> Vamos construir um diagrama de Venn que resuma
a informação dada. <br>

   <br>Começamos por escrever no diagrama os v4
correspondentes a $A\cap B$.<br>
   <br>Em seguida completa-se a informação
relativa a A\B (v1 - v4 = v5) e finalmente a informação relativa a B\A (v3 - (v5
+ v4) = v6).<br>
   <br>Por fim verifica-se se há alguma probabilidade de haver
um valor que não pertença nem a A nem a B.<br>
   <br>Sabemos que: <br>
<center>
   $P(A \cap B) + P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(\overline A
\cap \overline B) = 100\%$
   </center>
```

```
   Assim:<br>
   <center>
   $v4\%
+ v5\% + v6\% + P(\overline A\cap \overline B) = 100\% \Leftrightarrow
P(\overline A\cap \overline B) = 100\% - v4\% - v5\% - v6\% \Leftrightarrow
P(\overline A\cap \overline B) = v7\%$

   <center>
   <latex 100%>
tikzAwithB  </latex>
   </center>

   Vamos agora determinar o valor de
$P(A|B)$ <br>

   <br> Por definição de Probabilidade Condicionada sabemos
que: <br>
   <center>
   $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{v4\%}{v4\% +
v6\%} = \frac{v4\%}{v11\%} = v8 = rc1\%$
   </center>
```

Programação

```
class E97K50_DiagramaVenn_001(Exercise):

        def make_random(s):
            s.v1 = ur.iunif(30,50)
            s.v2 = ur.iunif(30,50)
            s.v4 = ur.iunif(10,20)
            vmin = max(s.v1,s.v2)
            s.pmin = vmin
            vmax = min(100,s.v1+s.v2)
            s.pmax = vmax
```

```
        s.v3 = ur.iunif(vmin,vmax)
        cutpoint = vmin/(100-vmax+vmin)
        s.re1= ur.iunif(0,100)
        if s.re1 <= cutpoint:
            s.re1 = s.re1*(100-vmax+vmin)
        else:
            s.re1 = s.re1*(100-vmax+vmin)+vmax-vmin
        s.re2= ur.iunif(0,100)
        if s.re2 <= cutpoint:
            s.re2 = s.re2*(1-vmax+vmin)
        else:
            s.re2 = s.re2*(100-vmax+vmin)+vmax-vmin
        s.re3= ur.iunif(0,100)
        if s.re3 <= cutpoint:
            s.re3 = s.re3*(100-vmax+vmin)
        else:
            s.re3 = s.re3*(100-vmax+vmin)+vmax-vmin



    def solve(s):
        vmin = max(s.v1,s.v2)
        vmax = min(1,s.v1+s.v2)
        s.v5 = s.v1 - s.v4
        s.v6 = s.v3 - (s.v5 + s.v4)
        s.v7 = 100 - (s.v5 + s.v4 + s.v6)
        s.v8 = s.v4/(s.v4 + s.v6)
        s.v9 = s.v4/s.v3
        s.v10 = s.v4/s.v1
        s.v11 = s.v4 + s.v6
        s.rc1 = round(s.v8*100,2)
        s.re1 = round(s.v4,2)
        s.re2 = round(s.v9*100,2)
        s.re3 = round(s.v10*100,2)
```

```
        #Para gerar o diagrama Venn A and B, passando 4 parametros.
        s.tikzAwithB = s.tikz_a_with_b(s.v5,s.v4,s.v6,s.v7)


        s.figresp = s.tikz_a_with_b(s.v5,s.v4,s.v6,s.v7)
        #Opcoes Erradas
        s.figerr1 = s.tikz_a_with_b(s.v5,s.v4,s.v6,0)
        s.figerr2 = s.tikz_a_with_b(s.v5,s.v4,s.v6,0)
        s.figerr3 = s.tikz_a_with_b(s.v5,s.v4,s.v6,s.v7)


    def tikz_common(s):
        return r'''

            % To fill areas
            \tikzset{
                filled/.style={fill=circle area, draw=circle edge,
                    ↪ thick},
                filledrectangle/.style={fill=circle area, draw=black
                    ↪ , line width=0.5mm},
                outline/.style={draw=circle edge, thick}
            }

            % Definition of circles
            \def\firstcircle{(2,2) circle (1.5cm)}
            \def\secondcircle{(4,2) circle (1.5cm)}

            % Definition of the universe Omega
            \def\omegauniverserectangle{(0,0) rectangle (6,4)}
            \def\omegauniverse{
                    \draw[draw=black, line width=0.5mm] \
                        ↪ omegauniverserectangle;
```

```
                \node[anchor=south] at (current bounding box.
                    ↪ north west) {$\Large\Omega$};
            }



            %

            % Colors
            \colorlet{circle edge}{blue!50}
            \colorlet{circle area}{blue!20}

        '''
    def tikz_a_with_b(s,a,b,c,d):
        return s.tikz_common() + r'''



            % Set A whit B
            \begin{tikzpicture}
            %\begin{scope}
                %\clip \firstcircle;
                %\fill[filled] \secondcircle;
            %\end{scope}
            \draw[outline] \firstcircle node {$A$};
            \draw[outline] \secondcircle node {$B$};
            \node at (2,1.5) {$''' + str(a) + r'''$};
            \node at (4,1.5) {$''' + str(c) + r'''$};
            \node[anchor=south] at (current bounding box.north) {$
                ↪    $};
            \node at (3,2) {$''' + str(b) + r'''$};
            \node at (5.3,0.5) {$''' + str(d) + r'''$};
            \omegauniverse;
            \end{tikzpicture}
```

```
          '''
```

A.5.2 Construção do Diagrama de Venn

E97K50_DiagramaVenn_002

%SUMMARY Diagrama de Venn

```
Este exercício trabalha a construção e leitura do Diagrama de Venn.



   SIACUAstart
   level=1
   slip=0.2
guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(4732, 1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Probabilidade da Probabilidade Condicional e Diagrama de Venn

```
Realizou-se um inquérito a v1a pessoas sobre o tipo de jornais que
leem.
   As respostas foram as seguintes: <br>

   <center>
      <br> v2
pessoas leem jornais generalistas <br>
      <br> v3 pessoas leem apenas jornais
desportivos <br>
      <br> v4 pessoas leem jornais generalistas e desportivos
<br>
      </center>

   <br> Desenha um diagrama de Venn que resuma a
```

informação dada e determina a probabilidade de, escolhida uma pessoa ao acaso de entre as que responderam ao inquérito, esta apenas ler um destes tipos de jornal. (Apresenta o resultado arredondado às centésimas)

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> <center> <latex 100%> figresp </latex>
<br> $\text{A probabilidade pedida é: }r1a$ </center> </choice>
   <choice>
<center> <latex 100%> figerr1 </latex> <br> $\text{A probabilidade pedida é:
}r2a$ </center> </choice>
   <choice> <center> <latex 100%> figerr2 </latex>
<br> $\text{A probabilidade pedida é: }r3a$ </center> </choice>
   <choice>
<center> <latex 100%> figerr3 </latex> <br> $\text{A probabilidade pedida é:
}r4a$ </center> </choice>
   </multiplechoice>

   O diagrama de Venn que
resume a informação dada é <br> <latex 100%> figresp </latex> <br>  e a
probabilidade pedida é: $r1a$ <br>
   <br> Vamos construir um diagrama de Venn.
<br>

   <br> Para isso consideremos os conjuntos $D$ e $G$ referentes,
respetivamente, ao conjunto das pessoas que leem jornais desportivos e ao
conjunto das pessoas que leem jornais generalistas.

   <br>Começamos por
escrever no diagrama os valor v4 correspondente a $D\cap G$.<br>
   <br>Em
seguida completa-se a informação relativa a D\G (v3) e finalmente a informação
relativa a G\D (v2-v4=v5).<br>
```

```
   <br>Por fim coloca-se o valor referente ao
número de pessoas que não leem qualquer destes tipos de jornal
(v1a-(v3+v4+v5)=v6)<br>

   <br> Assim, o diagrama que resume a informação
dada é o seguinte:

   <center>
   <latex 100%> tikzAxorB  </latex>
</center>

   e a probabilidade pedida será dada por $\frac{v3+v5}{v1a} =
\frac{v8}{v1a} = v9a$
```

Programação

```
class E97K50_DiagramaVenn_002(Exercise):

        def make_random(s):
             s.v1 = ur.iunif(40,50)
             partition_element=Partitions(s.v1,length=4).random_element()
             lista=list(partition_element)
             s.v1a = s.v1 + 400
             s.v4 = lista[3]+100
             s.v6 = lista[1]+100
             s.v3 = lista[2]+100
             s.v5 = lista[0]+100
             s.v2 = s.v4 + s.v5
             s.v7 = s.v1a - (s.v3 + s.v4 + s.v2)
             s.v8 = s.v3 + s.v5

        def solve(s):

             s.r1 = (s.v3+s.v5)/s.v1a
```

```
        s.r1a = round(s.r1,2)
        s.r2 = (s.v3+s.v2+s.v4)/s.v1a
        s.r2a = round(s.r2,2)
        s.r3 = (s.v3+s.v2)/s.v1a
        s.r3a = round(s.r3,2)
        s.r4 = (s.v3+s.v5+s.v4)/s.v1a
        s.r4a = round(s.r4,2)
        s.v9 = s.v8/s.v1a
        s.v9a = round(s.v9,2)

        #Para gerar o diagrama Venn A xor B, passando 4 parametros.

        s.tikzAxorB = s.tikz_a_xor_b(s.v3,s.v4,s.v5,s.v6)

        #Para gerar o diagrama Venn A or B, passando 4 parametros.

        s.tikzAorB = s.tikz_a_or_b(s.v3,s.v4,s.v5,s.v6)

        s.figresp = s.tikz_a_xor_b(s.v3,s.v4,s.v5,s.v6)
        #Opcoes Erradas
        s.figerr1 = s.tikz_a_or_b(s.v3,s.v4,s.v2,s.v7)
        s.figerr2 = s.tikz_a_xor_b(s.v3,s.v4,s.v2,s.v7)
        s.figerr3 = s.tikz_a_or_b(s.v3,s.v4,s.v5,s.v6)

    def tikz_common(s):
        return r'''

            % To fill areas
            \tikzset{
                filled/.style={fill=circle area, draw=circle edge,
                    ↪ thick},
                filledrectangle/.style={fill=circle area, draw=black
                    ↪ , line width=0.5mm},
```

```
            outline/.style={draw=circle edge, thick}
        }

        % Definition of circles
        \def\firstcircle{(2,2) circle (1.5cm)}
        \def\secondcircle{(4,2) circle (1.5cm)}



        % Definition of the universe Omega
        \def\omegauniverserectangle{(0,0) rectangle (6,4)}
        \def\omegauniverse{
                \draw[draw=black, line width=0.5mm] \
                    ↪ omegauniverserectangle;
                \node[anchor=south] at (current bounding box.
                    ↪ north west) {$\Large\Omega$};
        }



        %

        % Colors
        \colorlet{circle edge}{blue!50}
        \colorlet{circle area}{blue!20}

    '''
def tikz_a_xor_b(s,a,b,c,d):
    #a,b,c,d sao os inteiros a colocar nas zonas.

    return s.tikz_common() + r'''

        %Set A or B but not (A and B) also known a A xor B
        \begin{tikzpicture}
        \draw[filled, even odd rule] \firstcircle node {$''' +
```

```
        ↪ str(a) + r'''$}
                            \secondcircle node{$''' + str(c) +
            ↪ r''' $};

    %ESTA LINHA E' O TITULO; SE NECESSARIO TIRAR
    \node[anchor=south] at (current bounding box.north) {$ $
        ↪ };

    \node at (3,2) {$''' + str(b) + r'''$};
    \node at (5.3,0.5) {$''' + str(d) + r'''$};
    \node at (1,3.5) {$D$};
    \node at (5.3,3.5) {$G$};
    \omegauniverse;
    \end{tikzpicture}

  '''

def tikz_a_or_b(s,a,b,c,d):
  #a,b,c,d sao os inteiros a colocar nas zonas.

  return s.tikz_common() + r'''

    % Set A or B
    \begin{tikzpicture}
    % need to first fill both A and B
    \draw[filled] \firstcircle;
    \draw[filled] \secondcircle;
    % now, draw the outline
    \draw[outline] \firstcircle node {$''' + str(a) + r'''$
        ↪ };
    \draw[outline] \secondcircle node {$''' + str(c) + r'''$
        ↪ };
```

```
            %ESTA LINHA E' O TITULO; SE NECESSARIO TIRAR
            \node[anchor=south] at (current bounding box.north) {$ $
              ↪ };

            \node at (3,2) {$''' + str(b) + r'''$};
            \node at (5.3,0.5) {$''' + str(d) + r'''$};
            \node at (1,3.5) {$D$};
            \node at (5.3,3.5) {$G$};
            \omegauniverse;
            \end{tikzpicture}

        '''
```

A.6 Distribuição de Probabilidade

A.6.1 Valor médio. Tabela de distribuição de probabilidade.

E97k50_FunProbabilidade_001

%SUMMARY Função de Probabilidade

```
Este exercício pretende utilizar o valor médio para determinar
valores na Distribuição de Probabilidade.
   http://pt-
br.html.net/tutorials/html/lesson10.php



   SIACUAstart
   level=1
slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(4733, 1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
A tabela de distribuição de probabilidade de uma certa variável
aleatória X é:

   <center>
   <table border="1">
     <tr
align="center">
       <td>$$x_i$$</td>
       <td width=30>$v1$</td>
       <td
width=30>$v2$</td>
       <td width=30>$v3$</td>
     </tr>
     <tr
align="center">
       <td>$$P(X=x_i)$$</td>
       <td width=30> $a$ </td>
<td width=30> $b$ </td>
       <td width=30>$v4$</td>
     </tr>
   </table>
<br> a e b designam números reais
   </center>

   <br> O valor médio desta
variável é v5. Qual é o valor de a?
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresp$$ </choice>
   <choice> $$err1$$
</choice>
   <choice> $$err2$$ </choice>
```

```
   <choice> $$err3$$ </choice>
</multiplechoice>


   A soma das probabilidades de todos os acontecimentos
elementares do espaço amostral é igual a 1.
   <br> Logo $a + b + v4 = 1$
<br> O valor médio é dado por $\mu = a \times v1 + b \times v2 + v4 \times v3$
<br> Assim, para determinar o valor de $a$ basta resolver o sistema
\begin{cases} a + b + v4 = 1 \\ v1 \times a + v2 \times b + v3 \times v4 =v5
\end{cases}


   <br>
   <latex100%>
   \begin{equation}
       \begin{cases}
a + b + v4 = 1 \\ v1 \times a + v2 \times b + v3 \times v4 = v5 \end{cases}
\Leftrightarrow \begin{cases} a + b =  1 - v4 \\ v1 \times a + v2 \times b + v6
= v5 \end{cases}
       \Leftrightarrow \begin{cases} a + b =  v7 \\ v1 \times a
+ v2 \times b = v5 - v6 \end{cases}
       \Leftrightarrow \begin{cases} a =  v7
- b \\ v1 \times a + v2 \times b = v8 \end{cases}
       \Leftrightarrow
\begin{cases} a =  v7 - b \\ v1 \times (v7 - b) + v2 \times b = v8 \end{cases}\\
\Leftrightarrow \begin{cases} a =  v7 - b \\ v9 - v1 \times b + v2 \times b = v8
\end{cases}
       \Leftrightarrow \begin{cases} a =  v7 - b \\ v9 + v10 \times
b = v8 \end{cases}
       \Leftrightarrow \begin{cases} a =  v7 - b \\ v10
\times b = v8 - v9 \end{cases}
       \Leftrightarrow \begin{cases} a =  v7 - b
\\ v10 \times b = v11 \end{cases}
       \Leftrightarrow \begin{cases} a =  v7 -
```

```
b \\ b = \frac{v11}{v10} \end{cases}\\
       \Leftrightarrow \begin{cases} a =
v7 - v12 \\ b = v12 \end{cases}
       \Leftrightarrow \begin{cases} a =  v13 \\
b = v12
       \end{cases}
   \end{equation}
   </latex>

   <br> Então $a =
v13$
```

Programação

```
class E97k50_FunProbabilidade_001(Exercise):



        #http://www.sagemath.org/doc/reference/combinat/sage/combinat/
            ↪ partition.html

        def make_random(s):
             s.v1 = ur.iunif(1,3)
             s.v2 = s.v1+1
             s.v3 = s.v2+1
             partition_element = Partitions(10,length=3).random_element()
             lista = list(partition_element)
             #shuffle(lista)
             #print(lista)
             s.v4 = round(lista[2]/10,1)-0.1
             s.v20 = round(lista[1]/10,1)
             s.v21 = round(lista[0]/10,1)+0.1
             s.fr1 = s.v20
             s.fr2 = s.v21
             s.fr3 = s.v4
```

```
        s.v5 = s.v1*s.fr1 + s.v2*s.fr2 + s.v3*s.fr3
        s.v6 = s.v3 * s.v4
        s.v7 = s.v20 + s.v21
        s.v8 = s.v5 - (s.v3 * s.v4)
        s.v9 = s.v1 * s.v7
        s.v10 = s.v2 - s.v1
        s.v11 = s.v8 - s.v9
        s.v12 = s.v11 / s.v10
        s.v13 = s.v7 - s.v12

    def solve(s):

        s.vresp = s.v13
        s.err1 = s.v7 + s.v12
        s.err2 = s.v13+0.1
        s.err3 = s.v13-0.1
```

A.6.2 Valor médio

E97k50_FunProbabilidade_002

%SUMMARY Função de Probabilidade

```
Este exercício pretende determinar o valor médio numa dada
Distribuição de Probabilidade.
   http://pt-
br.html.net/tutorials/html/lesson10.php

   SIACUAstart
   level=1
slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(4733, 1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
A tabela de distribuição de probabilidade de uma certa variável
aleatória X é:

   <center>
   <table border="1">
     <tr
align="center">
       <td>$$x_i$$</td>
       <td width=30>$v1$</td>
       <td
width=30>$v2$</td>
       <td width=30>$v3$</td>
     </tr>
     <tr
align="center">
       <td>$$P(X=x_i)$$</td>
       <td width=30> $a$ </td>
<td width=30> $a$ </td>
       <td width=30>$v4$</td>
     </tr>
   </table>
<br> $a$ designa um número real
   </center>

   <br> Qual é o valor médio
desta variável aleatória?
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresp$$ </choice>
   <choice> $$err1$$
```

```
</choice>
   <choice> $$err2$$ </choice>
   <choice> $$err3$$ </choice>
</multiplechoice>


   A soma das probabilidades de todos os acontecimentos
elementares do espaço amostral é igual a 1.
   <br> Logo: <br>
   $$a + a + v4
= 1 \Leftrightarrow 2 \times a = 1 - v4 \Leftrightarrow 2 \times a = v5
\Leftrightarrow a = \frac{v5}{2} \Leftrightarrow a = v6$$ <br>


   <br> O
valor médio é dado por:<br>
   $$\mu = v1 \times a + v2 \times a + v3 \times v4
\Leftrightarrow \mu = v1 \times v6 + v2 \times v6 + v3 \times v4 \Leftrightarrow
\mu = v7 + v8 + v9 \Leftrightarrow \mu = v10 $$


   <br> Então $\mu = v10$
```

Programação

```
class E97k50_FunProbabilidade_002(Exercise):


        def make_random(s):
            s.v1 = ur.iunif(2,5)
            s.v2 = s.v1+2
            s.v3 = s.v2+2
            s.v4 = ur.runif(0,1,1)
            #s.fr1 = s.v20
            #s.fr2 = s.v21
            #s.fr3 = s.v4
            #s.v5 = s.v1*s.fr1 + s.v2*s.fr2 + s.v3*s.fr3
            #s.v6 = s.v3 * s.v4
```

```
    #s.v7 = s.v20 + s.v21
    #s.v8 = s.v5 - (s.v3 * s.v4)
    #s.v9 = s.v1 * s.v7
    #s.v10 = s.v2 - s.v1
    #s.v11 = s.v8 - s.v9
    #s.v12 = s.v11 / s.v10
    #s.v13 = s.v7 - s.v12

def solve(s):
    s.v5 = 1 - s.v4
    s.v6 = s.v5/2
    s.v7 = s.v1*s.v6
    s.v8 = s.v2*s.v6
    s.v9 = s.v3*s.v4
    s.v10 = s.v7 + s.v8 + s.v9
    s.vresp = s.v10

    #Opcoes Erradas Falta garantir que as opcoes sao diferentes
    s.err1 = s.v10 + 0.1
    s.err2 = s.v10 - 0.1
    s.err3 = s.v10 + 0.2
```

A.6.3 Função massa de probabilidade. Distribuição Binomial

E97k50_FunProbabilidade_003

%SUMMARY Função de Probabilidade

`Este exercício pretende determinar a probabilidade de determinado acontecimento usando a distribuição binomial.`

`http://pt-br.html.net/tutorials/html/lesson10.php`

`SIACUAstart`

```
   level=1
slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(4734, 1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Durante uma campanha publicitária uma marca de Pizza oferece, por
cada pizza individual, uma de três ofertas: uma lata de refrigerante, uma
sobremesa ou um brinde surpresa.<br>

   v1 amigos compram uma pizza cada um.
<br>

   Supõe que as ofertas têm igual probabilidade de sair. Constrói o modelo de probabilidade
   para esta variável e determina a probabilidade de sair brindeX@c{"uma lata de refrigerante",
    "uma sobremesa","um brinde surpresa"} a exatamente v2 dos v1 amigos?
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> <center> <latex> tbc </latex> <br>
$\text{A probabilidade pedida é}:vresp$ </center> </choice>
   <choice> <center>
<latex> err1 </latex> <br> $\text{A probabilidade pedida é}:verr1$ </center>
</choice>
   <choice> <center> <latex> err2 </latex> <br> $\text{A probabilidade
pedida é}:verr2$ </center> </choice>
   <choice> <center> <latex> err3 </latex>
<br> $\text{A probabilidade pedida é}:verr3$ </center> </choice>
</multiplechoice>

   Estamos perante um modelo binomial. <br>
```

```
   <br> A
probabilidade de sucesso (saída de brindeT) é igual a $\frac{1}{3}$ e a
probabilidade de insucesso (não saída de brindeT) é igual a $\frac{2}{3}$ <br>
<br> Os valores da variável X:"número de amigos a que sai brindeT" são:
       <center>
       0, 1,
... ,v1
       </center>

   A tabela de distribuição de probabilidades
é: <br>



   <showone caso>
   <thisone 2 amigos>
   $$ P(X = 0)= b0
\times \left(\frac{1}{3}\right)^{0} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{v1-0}= fb0
$$
   $$ P(X = 1)= b1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{1} \times
\left(\frac{2}{3}\right)^{v1-1}= fb1 $$
   $$ P(X = 2)= b2 \times
\left(\frac{1}{3}\right)^{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{v1-2}= fb2 $$
<center>
       tbc
       </center>
   </thisone>

   <thisone 3
amigos>
   $$ P(X = 0)= b0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{0} \times
\left(\frac{2}{3}\right)^{v1-0}= fb0 $$
   $$ P(X = 1)= b1 \times
\left(\frac{1}{3}\right)^{1} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{v1-1}= fb1 $$
```

```
$$ P(X = 2)= b2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \times
\left(\frac{2}{3}\right)^{v1-2}= fb2 $$
   $$ P(X = 3)= b3 \times
\left(\frac{1}{3}\right)^{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{v1-3}= fb3 $$
<center>
       tbc
       </center>
   </thisone>

   <thisone 4 amigos>
$$ P(X = 0)= b0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{0} \times
\left(\frac{2}{3}\right)^{v1-0}= fb0 $$
   $$ P(X = 1)= b1 \times
\left(\frac{1}{3}\right)^{1} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{v1-1}= fb1 $$
$$ P(X = 2)= b2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \times
\left(\frac{2}{3}\right)^{v1-2}= fb2 $$
   $$ P(X = 3)= b3 \times
\left(\frac{1}{3}\right)^{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{v1-3}= fb3 $$
$$ P(X = 4)= b4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{4} \times
\left(\frac{2}{3}\right)^{v1-4}= fb4 $$
       <center>
       tbc
</center>
   </thisone>

   <thisone 5 amigos>
   $$ P(X = 0)= b0 \times
\left(\frac{1}{3}\right)^{0} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{v1-0}= fb0 $$
$$ P(X = 1)= b1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{1} \times
\left(\frac{2}{3}\right)^{v1-1}= fb1 $$
   $$ P(X = 2)= b2 \times
\left(\frac{1}{3}\right)^{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{v1-2}= fb2 $$
$$ P(X = 3)= b3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{3} \times
```

```
\left(\frac{2}{3}\right)^{v1-3}= fb3 $$
   $$ P(X = 4)= b4 \times
\left(\frac{1}{3}\right)^{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{v1-4}= fb4 $$
$$ P(X = 5)= b5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{5} \times
\left(\frac{2}{3}\right)^{v1-5}= fb5 $$
       <center>
       tbc
</center>
   </thisone>


   </showone>


   <br>
   A probabilidade de
sair brindeT a exatamente v2 dos v1 amigos é $vresp$.
```

Programação

```
class E97k50_FunProbabilidade_003(Exercise):


        def make_random(s):
             s.v1 = ur.iunif(2,5)
             s.v2 = ur.iunif(1,s.v1)


             s.brindeX = ur.iunif(0,2)
             s.brindeT = ["uma lata de refrigerante", "uma sobremesa","um
                 ↪ brinde surpresa"][s.brindeX]
             s.caso = s.v1 - 2


             #s.amg = s.v2


             s.b0 = binomial(s.v1,0)
             s.b1 = binomial(s.v1,1)
             s.b2 = binomial(s.v1,2)
```

```
        s.b3 = binomial(s.v1,3)
        s.b4 = binomial(s.v1,4)
        s.b5 = binomial(s.v1,5)

        s.fb0 = s.b0*(1/3)^0*(2/3)^s.v1
        s.fb1 = s.b1*(1/3)^1*(2/3)^(s.v1-1)
        s.fb2 = s.b2*(1/3)^2*(2/3)^(s.v1-2)
        s.fb3 = s.b3*(1/3)^3*(2/3)^(s.v1-3)
        s.fb4 = s.b4*(1/3)^4*(2/3)^(s.v1-4)
        s.fb5 = s.b5*(1/3)^5*(2/3)^(s.v1-5)


    def solve(s):

        if s.v1==2:
            s.tbc = s.tabela([s.fb0,s.fb1,s.fb2]) # tbc=tabela
                ↪ correta
            s.err1 = s.tabela([1/s.v1,1/s.v1,1/s.v1])
            s.err2 = s.tabela([(1/3)^s.v1,(1/3)^s.v1,(1/3)^s.v1])
            s.err3 = s.tabela([(1/3)^0*(2/3)^s.v1,(1/3)^1*(2/3)^(s.
                ↪ v1-1),(1/3)^2*(2/3)^(s.v1-2)])
        elif s.v1==3:
            s.tbc = s.tabela([s.fb0,s.fb1,s.fb2,s.fb3])
            s.err1 = s.tabela([1/s.v1,1/s.v1,1/s.v1,1/s.v1])
            s.err2 = s.tabela([(1/3)^s.v1,(1/3)^s.v1,(1/3)^s.v1
                ↪ ,(1/3)^s.v1])
            s.err3 = s.tabela([(1/3)^0*(2/3)^s.v1,(1/3)^1*(2/3)^(s.
                ↪ v1-1),(1/3)^2*(2/3)^(s.v1-2),(1/3)^3*(2/3)^(s.v1
                ↪ -3)])
        elif s.v1==4:
            s.tbc = s.tabela([s.fb0,s.fb1,s.fb2,s.fb3,s.fb4])
            s.err1 = s.tabela([1/s.v1,1/s.v1,1/s.v1,1/s.v1,1/s.v1])
            s.err2 = s.tabela([(1/3)^s.v1,(1/3)^s.v1,(1/3)^s.v1
```

```
            ↪ ,(1/3)^s.v1,(1/3)^s.v1])
        s.err3 = s.tabela([(1/3)^0*(2/3)^s.v1,(1/3)^1*(2/3)^(s.
            ↪ v1-1),(1/3)^2*(2/3)^(s.v1-2),(1/3)^3*(2/3)^(s.v1
            ↪ -3),(1/3)^4*(2/3)^(s.v1-4)])
    else:
        s.tbc = s.tabela([s.fb0,s.fb1,s.fb2,s.fb3,s.fb4,s.fb5])
        s.err1 = s.tabela([1/s.v1,1/s.v1,1/s.v1,1/s.v1,1/s.v1,1/
            ↪ s.v1])
        s.err2 = s.tabela([(1/3)^s.v1,(1/3)^s.v1,(1/3)^s.v1
            ↪ ,(1/3)^s.v1,(1/3)^s.v1,(1/3)^s.v1])
        s.err3 = s.tabela([(1/3)^0*(2/3)^s.v1,(1/3)^1*(2/3)^(s.
            ↪ v1-1),(1/3)^2*(2/3)^(s.v1-2),(1/3)^3*(2/3)^(s.v1
            ↪ -3),(1/3)^4*(2/3)^(s.v1-4),(1/3)^5*(2/3)^(s.v1-5)
            ↪ ])

    if s.v2==1:
        s.vresp = s.fb1
        s.verr1 = 1/s.v1
        s.verr2 = (1/3)^s.v1
        s.verr3 = (1/3)^1*(2/3)^(s.v1-1)
    elif s.v2==2:
        s.vresp = s.fb2
        s.verr1 = 1/s.v1
        s.verr2 = (1/3)^s.v1
        s.verr3 = (1/3)^2*(2/3)^(s.v1-2)
    elif s.v2==3:
        s.vresp = s.fb3
        s.verr1 = 1/s.v1
        s.verr2 = (1/3)^s.v1
        s.verr3 = (1/3)^3*(2/3)^(s.v1-3)
    elif s.v2==4:
        s.vresp = s.fb4
        s.verr1 = 1/s.v1
```

```
        s.verr2 = (1/3)^s.v1
        s.verr3 = (1/3)^4*(2/3)^(s.v1-4)
    elif s.v2==5:
        s.vresp = s.fb5
        s.verr1 = 1/s.v1
        s.verr2 = (1/3)^s.v1
        s.verr3 = (1/3)^5*(2/3)^(s.v1-5)

    #selecionar uma destas com if, elif, elif, elif, else
    s.t3 = s.tabela([s.fb0,s.fb1,s.fb2])
    s.t4 = s.tabela([s.fb0,s.fb1,s.fb2,s.fb3])
    s.t5 = s.tabela([s.fb0,s.fb1,s.fb2,s.fb3,s.fb4])
    s.t6 = s.tabela([s.fb0,s.fb1,s.fb2,s.fb3,s.fb4,s.fb5])

    #Exemplo:
    s.prb = s.db(3,10,0.5)
    #s.prb = s.db(s.xx, s.nn, s.pp)

def db(s,x,n,p):
    return binomial(n,x) * p^x * (1.0 - p)^(n-x)



def tabela(s,cols):

    ncols = len(cols) #numero de colunas

    #INICIO da TABELA ==========================================
    txt = r'''<table border="1">'''



    #LINHA 1 ==========================================
    txt += r'''<tr align="center">'''
    txt += r'''<td>$$x_i$$</td>'''
```

```
        for d in range(ncols):
            txt += r'''<td width=30> %d </td>''' % (d) #d in {0,1,2,3,4...}
        txt += r'''</tr>'''



        #LINHA 2 ================================================
        txt += r'''<tr align="center">'''
        txt += r'''<td>$$\text{P}(X = x_i)$$</td>'''
        for d in range(ncols):
            txt += r'''<td width=30>$$\text{P}(X = %d)$$</td>''' % (d) #d in {0,1,2,3,4...}
        txt += r'''</tr>'''



        #LINHA 3 ================================================
        txt += r'''<tr align="center">'''
        txt += r'''<td>$$\text{P}(X = x_i)$$</td>'''
        for d in range(ncols):
            txt += r'''<td width=30> ''' + str(cols[d]) + r'''</td>'''
        txt += r'''</tr>'''



        #FIM da TABELA ================================================
        txt += r'''</table>'''



        return txt
```

A.6.4 Função massa de probabilidade. Regra do produto

E97k50_FunProbabilidade_004

%SUMMARY Função de Probabilidade

```
Este exercício pretende definir a Função de Probabilidade.
   http
://pt-br.html.net/tutorials/html/lesson10.php



   SIACUAstart
level=1
   slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(4734, 1)]
SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Um saco contem um total de v1 bolas, sendo v2 bolas brancas e v3 bolas
verdes.<br>
   Retiram-se 3 bolas, sem reposição.<br>
   Seja X a variável
aleatória que faz corresponder a cada extração o número de bolas verdes.<br>
Determina a probabilidade de verdeX@c{"saírem apenas duas bolas verdes","saírem pelo menos
duas bolas verdes","saírem no máximo duas bolas verdes"}?
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> $$vresp$$ </choice>
   <choice> $$err1$$
</choice>
   <choice> $$err2$$ </choice>
   <choice> $$err3$$ </choice>
</multiplechoice>

   <br> Seja X = número de bolas verdes <br>
```

```
   <br>
Ao extrair três bolas do saco poderemos obter zero bolas verdes (X = 0), uma
bola verde e duas bolas brancas (X = 1), duas bolas verdes e uma bola branca (X
= 2) ou todas as  bolas verdes (X = 3).<br>

   <br> Para definir a função
massa de probabilidade desta variável aleatória temos de determinar a
probabilidade de cada um dos elementos do suporte do modelo (cada valor da
variável).<br>

   <br> Assim: <br>
   <br> A probabilidade de saírem as
bolas todas brancas, isto é, nenhuma bola verde, é dada por: <br>
   <br> $$ P(X
= 0) = bn0 \times \frac{v2}{v1} \times \frac{v2-1}{v1-1} \times
\frac{v2-2}{v1-2} = bn0 \times \frac{v2}{v1} \times f1 \times f2 = r0$$ <br>
<br> A probabilidade de sair uma bola verde e duas brancas é dada por: <br>
<br> $$ P(X = 1) = bn1 \times \frac{v3}{v1} \times \frac{v2}{v1-1} \times
\frac{v2-1}{v1-2} = bn1 \times \frac{v3}{v1} \times f3 \times f4 = r1$$ <br>
<br> A probabilidade de sair duas bolas verdes e uma branca é dada por: <br>
<br> $$ P(X = 2) = bn2 \times \frac{v3}{v1} \times \frac{v3-1}{v1-1} \times
\frac{v2}{v1-2} = bn2 \times \frac{v3}{v1} \times f5 \times f6 = r2$$ <br>
<br> A probabilidade de saírem todas as bolas verdes é dada por: <br>
   <br> $$
P(X = 3) = bn3 \times \frac{v3}{v1} \times \frac{v3-1}{v1-1} \times
\frac{v3-2}{v1-2} = bn3 \times \frac{v2}{v1} \times f5 \times f7 = r3$$ <br>
<br> A tabela ficará assim definida:<br>

   <center>
   <table border="1">
<tr align="center">
       <td>$$X = x_i$$</td>
```

```
       <td width=30>$0$</td>
<td width=30>$1$</td>
       <td width=30>$2$</td>
       <td width=30>$3$</td>
</tr>
     <tr align="center">
       <td>$$P(X = x_i)$$</td>
       <td
width=30> $P(X = 0)$ </td>
       <td width=30> $P(X = 1)$ </td>
       <td
width=30> $P(X = 2)$ </td>
       <td width=30> $P(X = 3)$ </td>
     </tr>
<tr align="center">
       <td>$$P(X = x_i)$$</td>
       <td width=30> $r0$
</td>
       <td width=30> $r1$ </td>
       <td width=30> $r2$ </td>
       <td
width=30> $r3$ </td>
     </tr>
   </table>
   </center>

   <showone caso>
<thisone Probabilidade de saírem apenas duas bolas verdes>
   A probabilidade de
saírem apenas duas bolas brancas é dada por P(X = 2)<br>
   <center>
   $$p(X =
2) = r2$$
```

```
   </center>
   </thisone>


   <thisone Probabilidade de saírem
pelo menos duas bolas verdes>
   A probabilidade de saírem pelo menos duas bolas
brancas é dada por $$P(X \geq 2) = P(X = 2)+P(X = 3)$$ <br>
   <center>
   $$p(X
\geq 2) = P(X = 2)+P(X = 3) = r2 + r3 = rp1$$
   </center>
   </thisone>
<thisone Probabilidade de saírem no máximo duas bolas verdes>
   A probabilidade
de saírem no máximo duas bolas brancas é dada por $$P(X \leq 2) = P(X = 0)+P(X =
1)+P(X=2)$$ <br>
   <center>
   $$p(X \leq 2) = P(X = 0)+P(X = 1)+P(X=2) = r0 +
r1 + r3 = rp2$$
   </center>
   </thisone>


   </showone>
```

Programação

```
class E97k50_FunProbabilidade_004(Exercise):



    def make_random(s):


        s.v1 = ur.iunif(8,15)
        s.v3 = ur.iunif(3,7)
        s.v2 = s.v1-s.v3
```

```
        s.verdeX = ur.iunif(0,2)
        s.pergT = ["apenas duas bolas verdes","saírem pelo menos
           ↪ duas bolas verdes","saírem no maximo duas bolas verdes
           ↪ "][s.verdeX]
        s.caso = s.verdeX

        s.bn0 = binomial(3,0)
        s.bn1 = binomial(3,1)
        s.bn2 = binomial(3,2)
        s.bn3 = binomial(3,3)



    def solve(s):
        s.f1 = (s.v2-1)/(s.v1-1)
        s.f2 = (s.v2-2)/(s.v1-2)
        s.r0 = s.bn0*s.v2/s.v1*s.f1*s.f2
        s.f3 = s.v2/(s.v1-1)
        s.f4 = (s.v2-1)/(s.v1-2)
        s.r1 = s.bn1*s.v3/s.v1*s.f3*s.f4
        s.f5 = (s.v3-1)/(s.v1-1)
        s.f6 = s.v2/(s.v1-2)
        s.r2 = s.bn2*s.v3/s.v1*s.f5*s.f6
        s.f7 = (s.v3-2)/(s.v1-2)
        s.r3 = s.bn3*s.v3/s.v1*s.f5*s.f7
        s.rp1 = s.r2 + s.r3
        s.ro2 = s.r0 + s.r1 + s.r2

        if s.caso==0:
            s.vresp = s.r2
            s.err1 = s.r2/s.bn2
            s.err2 = 1/s.v1
            s.err3 = s.v3/s.v1
        elif s.caso==1:
```

```
            s.vresp = s.r2+s.r3
            s.err1 = s.r2/s.bn2+s.r3/s.bn3
            s.err2 = s.r0+s.r1
            s.err3 = s.r0/s.bn0+s.r1/s.bn1
        elif s.caso==2:
            s.vresp = s.r0+s.r1+s.r2
            s.err1 = s.r0/s.bn0+s.r1/s.bn1+s.r2/s.bn2
            s.err2 = s.r2+s.r3
            s.err3 = s.r3
```

A.6.5 Função massa de probabilidade

E97k50_FunProbabilidade_005

%SUMMARY Função Massa de Probabilidade

Este exercício pretende determinar a tabela da Função Massa de uma Distribuição.

http://pt-br.html.net/tutorials/html/lesson10.php

SIACUAstart

level=1

slip=0.2

guess=0.25

discr=0.3

concepts =
[(4734, 1)]

SIACUAend

%PROBLEM Exemplo

O número de irmãos dos alunos de uma turma do 11º ano, que tem 25 alunos, é dado pela seguinte tabela:

<center>

<table border="1">

<tr align="center">

```
       <td>$$\text {Nº de irmãos}$$</td>
       <td
width=30>$v1$</td>
       <td width=30>$v2$</td>
       <td width=30>$v3$</td>
<td width=30>$v4$</td>
       <td width=30>$v5$</td>
     </tr>
     <tr
align="center">
       <td>$$\text{Freq. Absoluta}$$</td>
       <td width=30>
$fa1$ </td>
       <td width=30> $fa2$ </td>
       <td width=30> $fa3$ </td>
<td width=30> $fa4$ </td>
       <td width=30> $fa5$ </td>
     </tr>
</table>
   </center>

   <br> Define a função massa de probabilidade da
variável aleatória
   <br>
   <center>
   X - número de irmãos de um aluno
escolhido aos acaso da turma
   </center>
   <br> e indica a probabilidade de um
aluno, dessa turma, ter pelo menos v3 irmãos.
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
```

```
   <choice> $$X=\left(\begin{array}{ccccc}
       v1
& v2 & v3 & v4 & v5 \\
       r1 & r2 & r3 & r4 & r5 \\
\end{array}\right)$$ $$\text{A probabilidade pedida é: }vresp$$ </choice>
<choice> $$X=\left(\begin{array}{ccccc}
       v1 & v2 & v3 & v4 & v5 \\
r1 & r2 & r3 & r4 & r5 \\
       \end{array}\right)$$ $$\text{A probabilidade
pedida é: }err1$$ </choice>
   <choice> $$X=\left(\begin{array}{ccccc}
       v1
& v2 & v3 & v4 & v5 \\
       r6 & r6 & r6 & r6 & r6 \\
\end{array}\right)$$ $$\text{A probabilidade pedida é: }err2$$ </choice>
<choice> $$X=\left(\begin{array}{ccccc}
       v1 & v2 & v3 & v4 & v5 \\
r1 & r2 & r3 & r4 & r5 \\
       \end{array}\right)$$ $$\text{A probabilidade
pedida é: }err3$$ </choice>
   </multiplechoice>

   Para definir a função
massa de probabilidade desta variável aleatória temos de determinar a
probabilidade de cada um dos elementos do suporte do modelo (cada valor da
variável).

   <br>
   Assim:
      $$ P(X = v1)= \frac{fa1}{25} = r1 $$
$$ P(X = v2)= \frac{fa2}{25} = r2 $$
      $$ P(X = v3)= \frac{fa3}{25} = r3 $$
$$ P(X = v4)= \frac{fa4}{25} = r4 $$
```

```
      $$ P(X = v5)= \frac{fa5}{25} = r5 $$
Então a função massa fica assim definida:
       $$X=\left(\begin{array}{ccccc}
v1 & v2 & v3 & v4 & v5 \\
       P(X= v1 ) & P(X= v2 ) & P(X= v3 ) & P(X= v4 ) &
P(X= v5 ) \\
       \end{array}\right)$$
$$X=\left(\begin{array}{ccccc}
       v1 & v2 & v3 & v4 & v5 \\
       fa1/25 &
fa2/25 & fa3/25 & fa4/25 & fa5/25 \\
       \end{array}\right)$$
$$X=\left(\begin{array}{ccccc}
       v1 & v2 & v3 & v4 & v5 \\
       r1 & r2 &
r3 & r4 & r5 \\
       \end{array}\right)$$

   Determinar a
probabilidade de um aluno da turma, escolhido ao acaso, ter pelo menos $v3$
irmãos é o mesmo que determinar a probabilidade de o aluno ter no mínimo $v3$
irmãos, ou seja $P(X \geq v3)$.
   Então a resposta  é $$P(X \geq v3) = P(X =
3) + P(X = 4) + P(X = 5) = r3 + r4 + r5 = vresp$$
```

Programação

```
class E97k50_FunProbabilidade_005(Exercise):



        #http://www.sagemath.org/doc/reference/combinat/sage/combinat/
            ↪ partition.html

        def make_random(s):
```

```
        partition_element=Partitions(25,length=5).random_element()
        lista=list(partition_element)
        #shuffle(lista)
        #print(lista)
        s.v1=ur.iunif(0,1)
        s.v2=s.v1+1
        s.v3=s.v2+1
        s.v4=s.v3+1
        s.v5=s.v4+1

        s.fa1 = lista[1]
        s.fa2 = lista[0]
        s.fa3 = lista[2]
        s.fa4 = lista[3]
        s.fa5 = lista[4]

        s.r1 = round(s.fa1/25,2)
        s.r2 = round(s.fa2/25,2)
        s.r3 = round(s.fa3/25,2)
        s.r4 = round(s.fa4/25,2)
        s.r5 = round(s.fa5/25,2)
        s.r6 = 1/5

    def solve(s):

        s.vresp = s.r3 + s.r4 + s.r5

        #Opcoes Erradas Falta garantir que as opcoes sao diferentes
        s.err1 = s.r3
        s.err2 = 3/5
        s.err3 = s.r4 + s.r5
```

A.7 Modelos de Probabilidade

A.7.1 Modelo de Poisson. Probabilidade simples

E97k50_ModProbabilidade_001

%SUMMARY Modelo de Poisson

```
Este exercício pretende determinar a probabilidade de determinado
acontecimento usando o modelo de Poisson.


   SIACUAstart
   level=1
slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(4734, 1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
Supõe que uma central telefónica recebe, em média, v1 chamadas cada
v2q minutos. Qual é a probabilidade que a
   central receba v3 chamadas num
intervalo de v4 minutos? <br>

   Utiliza, para os cálculos intermédios,
arredondamentos com um mínimo de quatro casas decimais. Apresenta o resultado
final em percentagem, arredondado às centésimas.
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> <center> <br> $\text{A probabilidade
pedida é}:v9\%$ </center> </choice>
   <choice> <center> <br> $\text{A
```

```
probabilidade pedida é}:err1\%$ </center> </choice>
   <choice> <center> <br>
$\text{A probabilidade pedida é}:err2\%$ </center> </choice>
   <choice>
<center> <br> $\text{A probabilidade pedida é}:err3\%$ </center> </choice>
</multiplechoice>

   Estamos perante uma variável que representa o número de vezes que determinado fenómeno oco
   O modelo de Poisson adapta-se a este tipo de situação. <br>



   <br>Designemos por X a
variável que representa o número de chamadas que a central recebe em v2q
minutos.<br>

   Sabemos que $\lambda = v1$.<br>

   Se, em média, a
central telefónica recebe v1 chamadas durante v2q minutos, podemos dizer que, em v4
minutos receberá $\frac{v1}{v2q}\times v4 = v11\times v4  = v5$ chamadas em média.<br>
Podemos definir uma nova variável aleatória Y, também com distribuição de Poisson mas com par

   <br>
A probabilidade de serem recebidas v3 chamadas em v4 minutos será dada por:
$$P(Y = v3)= e^{-v5}\times \frac{v5^{v3}}{v3!}$$ <br>

   <center>
   $$P(Y =
v3)= e^{-v5}\times \frac{v5^{v3}}{v3!} \Leftrightarrow P(Y = v3)= v6\times
\frac{v7}{v8} \Leftrightarrow P(Y = v3) \approx v9\%$$
   </center>

   <br>
```

```
A probabilidade pedida é $v9\%$.
```

Programação

```
class E97k50_ModProbabilidade_001(Exercise):


    def make_random(s):
        s.v1 = ur.iunif(3,6)
        s.v2 = ur.iunif(1,2)
        s.v2q = 2*s.v2
        s.v3 = ur.iunif(2,5)
        s.v4 = s.v2q +1



    def solve(s):
        s.v11 = round(s.v1/s.v2q,2)
        s.v5 = s.v11*s.v4
        s.v6 = round(exp(1)^-s.v5,4)
        s.v7 = s.v5^s.v3
        s.v8 = factorial(s.v3)
        s.v9 = round(exp(1)^-s.v5*s.v7/s.v8,4)*100
        s.v10 = s.v1^s.v3
        s.err1 = round(exp(1)^-s.v1*s.v10/s.v8,4)*100
        s.err2 = round(exp(1)^-s.v1*s.v10/(s.v3^2),4)*100
        s.err3 = round(exp(1)^-s.v5*s.v1/s.v8,4)*100 + 2

    '''
    def poisson_latex(s,lam,k):
        return r'e^{-%s} \frac{%s^%s}{%s!}' % (lam, lam, k , k)
        '''
```

A.7.2 Modelo Binomial. Modelo de distribuição

E97k50_ModProbabilidade_002

%SUMMARY Modelo de Probabilidade

Este exercício pretende determinar a probabilidade de determinado acontecimento usando a distribuição binomial.

http://pt-br.html.net/tutorials/html/lesson10.php

NOTA: Este exercício só permite 4 variantes

SIACUAstart

level=1

slip=0.2

guess=0.25

discr=0.3

concepts = [(4734, 1)]

SIACUAend

%PROBLEM Exemplo

Uma moeda honesta é lançada v1 vezes. Representa o modelo da distribuição do número de "Faces Nacionais" resultantes.

%ANSWER

<multiplechoice>

<choice> <latex> rp </latex> </choice>

<choice> <latex> err1 </latex> </choice>

<choice> <latex> err2 </latex> </choice>

<choice> <latex> err3 </latex> </choice>

</multiplechoice>

Estamos perante um modelo binomial, uma vez que:

Serão realizadas v1 observações independentes, sempre nas mesmas condições;

```
       <br>Em cada lançamento
apenas são possíveis dois resultados: Obter "Face Nacional" com a probabilidade
de $\frac{1}{2}$ e obter "Face Europeia" com a probabilidade de
$\frac{1}{2}$.<br>
       <br>O resultado de cada observação é independente dos
resultados obtidos nas provas anteriores. <br>
       <br>A probabilidade de
sucesso é constante, não variando de observação para observação. <br>
<br> Nesta situação, ao lançar a moeda v1 vezes, as hipóteses de obter "Face
Nacional" são:<br>
       <center>
       0, 1, ..., v1
       </center>
<br> São estes os valores da variável X:"número de Faces Nacionais obtidas"<br>


   <br> A
tabela de distribuição desta variável será:<br>


   <br>


   <showone
caso>
   <thisone 2 lançamentos>
       <center>
       rp
       </center>
$$ P(X = 0)= b0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{0} \times
\left(\frac{1}{2}\right)^{v1-0}= fa0 $$
   $$ P(X = 1)= b1 \times
\left(\frac{1}{2}\right)^{1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{v1-1}= fa1 $$
$$ P(X = 2)= b2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \times
\left(\frac{1}{2}\right)^{v1-2}= fa2 $$
   </thisone>
```

```
   <thisone
3 lançamentos>
       <center>
       rp
       </center>
   $$ P(X = 0)= b0
\times \left(\frac{1}{2}\right)^{0} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{v1-0}= fa0
$$
   $$ P(X = 1)= b1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1} \times
\left(\frac{1}{2}\right)^{v1-1}= fa1 $$
   $$ P(X = 2)= b2 \times
\left(\frac{1}{2}\right)^{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{v1-2}= fa2 $$
$$ P(X = 3)= b3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{3} \times
\left(\frac{1}{2}\right)^{v1-3}= fa3 $$
   </thisone>

   <thisone 4
lançamentos>
       <center>
       rp
       </center>
   $$ P(X = 0)= b0
\times \left(\frac{1}{2}\right)^{0} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{v1-0}= fa0
$$
   $$ P(X = 1)= b1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1} \times
\left(\frac{1}{2}\right)^{v1-1}= fa1 $$
   $$ P(X = 2)= b2 \times
\left(\frac{1}{2}\right)^{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{v1-2}= fa2 $$
$$ P(X = 3)= b3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{3} \times
\left(\frac{1}{2}\right)^{v1-3}= fa3 $$
   $$ P(X = 4)= b4 \times
\left(\frac{1}{2}\right)^{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{v1-4}= fa4 $$
```

```
</thisone>


   <thisone 5 lançamentos>
       <center>
       rp
</center>
   $$ P(X = 0)= b0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{0} \times
\left(\frac{1}{2}\right)^{v1-0} = fa0 $$
   $$ P(X = 1)= b1 \times
\left(\frac{1}{2}\right)^{1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{v1-1}= fa1 $$
$$ P(X = 2)= b2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \times
\left(\frac{1}{2}\right)^{v1-2}= fa2 $$
   $$ P(X = 3)= b3 \times
\left(\frac{1}{2}\right)^{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{v1-3}= fa3 $$
$$ P(X = 4)= b4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{4} \times
\left(\frac{1}{2}\right)^{v1-4}= fa4 $$
   $$ P(X = 5)= b5 \times
\left(\frac{1}{2}\right)^{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{v1-5}= fa5 $$
</thisone>

   </showone>
```

Programação

```
class E97k50_ModProbabilidade_002(Exercise):

        def make_random(s):
            s.v1 = ur.iunif(2,5)
            s.v2 = ur.iunif(2,s.v1)
            s.v3 = s.v1 - 1

            s.caso = s.v1 - 2

            s.b0 = binomial(s.v1,0)
```

```
        s.b1 = binomial(s.v1,1)
        s.b2 = binomial(s.v1,2)
        s.b3 = binomial(s.v1,3)
        s.b4 = binomial(s.v1,4)
        s.b5 = binomial(s.v1,5)

        s.fa0 = binomial(s.v1,0)*(1/2)^0*(1/2)^s.v1
        s.fa1 = binomial(s.v1,1)*(1/2)^1*(1/2)^(s.v1-1)
        s.fa2 = binomial(s.v1,2)*(1/2)^2*(1/2)^(s.v1-2)
        s.fa3 = binomial(s.v1,3)*(1/2)^3*(1/2)^(s.v1-3)
        s.fa4 = binomial(s.v1,4)*(1/2)^4*(1/2)^(s.v1-4)
        s.fa5 = binomial(s.v1,5)*(1/2)^5*(1/2)^(s.v1-5)



        #s.r2 = round(s.fa2/25,2)
        #s.r3 = round(s.fa3/25,2)
        #s.r4 = round(s.fa4/25,2)
        #s.r5 = round(s.fa5/25,2)
        #s.r6 = round(s.fa5/25,2)

    def solve(s):
        s.t3 = s.tabela([s.fa0,s.fa1,s.fa2])
        s.t3r1 = s.tabela([1/s.v1,1/s.v1,1/s.v1])
        s.t3r2 = s.tabela([(1/2)^s.v1,(1/2)^s.v1,(1/2)^s.v1])
        s.t3r3 = s.tabela([(1/2)^0*(1/2)^s.v1,(1/2)^1*(1/2)^(s.v1-1)
            ↪ ,(1/2)^2*(1/2)^(s.v1-2)])
        s.t4 = s.tabela([s.fa0,s.fa1,s.fa2,s.fa3])
        s.t4r1 = s.tabela([1/s.v1,1/s.v1,1/s.v1,1/s.v1])
        s.t4r2 = s.tabela([(1/2)^s.v1,(1/2)^s.v1,(1/2)^s.v1,(1/2)^s.
            ↪ v1])
        s.t4r3 = s.tabela([(1/2)^0*(1/2)^s.v1,(1/2)^1*(1/2)^(s.v1-1)
            ↪ ,(1/2)^2*(1/2)^(s.v1-2),(1/2)^2*(1/2)^(s.v1-3)])
```

```
s.t5 = s.tabela([s.fa0,s.fa1,s.fa2,s.fa3,s.fa4])
s.t5r1 = s.tabela([1/s.v1,1/s.v1,1/s.v1,1/s.v1,1/s.v1])
s.t5r2 = s.tabela([(1/2)^s.v1,(1/2)^s.v1,(1/2)^s.v1,(1/2)^s.
    ↪ v1,(1/2)^s.v1])
s.t5r3 = s.tabela([(1/2)^0*(1/2)^s.v1,(1/2)^1*(1/2)^(s.v1-1)
    ↪ ,(1/2)^2*(1/2)^(s.v1-2),(1/2)^2*(1/2)^(s.v1-3),(1/2)
    ↪ ^2*(1/2)^(s.v1-4)])
s.t6 = s.tabela([s.fa0,s.fa1,s.fa2,s.fa3,s.fa4,s.fa5])
s.t6r1 = s.tabela([1/s.v1,1/s.v1,1/s.v1,1/s.v1,1/s.v1,1/s.v1
    ↪ ])
s.t6r2 = s.tabela([(1/2)^s.v1,(1/2)^s.v1,(1/2)^s.v1,(1/2)^s.
    ↪ v1,(1/2)^s.v1,(1/2)^s.v1])
s.t6r3 = s.tabela([(1/2)^0*(1/2)^s.v1,(1/2)^1*(1/2)^(s.v1-1)
    ↪ ,(1/2)^2*(1/2)^(s.v1-2),(1/2)^2*(1/2)^(s.v1-3),(1/2)
    ↪ ^2*(1/2)^(s.v1-4),(1/2)^2*(1/2)^(s.v1-5)])

if s.v1==2:
    s.rp = s.t3
    s.err1 = s.t3r1
    s.err2 = s.t3r2
    s.err3 = s.t3r3
elif s.v1==3:
    s.rp = s.t4
    s.err1 = s.t4r1
    s.err2 = s.t4r2
    s.err3 = s.t4r3
elif s.v1==4:
    s.rp = s.t5
    s.err1 = s.t5r1
    s.err2 = s.t5r2
    s.err3 = s.t5r3
else:
    s.rp = s.t6
```

```
            s.err1 = s.t6r1
            s.err2 = s.t6r2
            s.err3 = s.t6r3



        #selecionar uma destas com if, elif, elif, elif, else
        s.t3 = s.tabela([s.fa0,s.fa1,s.fa2])
        s.t4 = s.tabela([s.fa0,s.fa1,s.fa2,s.fa3])
        s.t5 = s.tabela([s.fa0,s.fa1,s.fa2,s.fa3,s.fa4])
        s.t6 = s.tabela([s.fa0,s.fa1,s.fa2,s.fa3,s.fa4,s.fa5])

        #Exemplo:
        s.prb = s.db(3,10,0.5)
        #s.prb = s.db(s.xx, s.nn, s.pp)

    def db(s,x,n,p):
        return binomial(n,x) * p^x * (1.0 - p)^(n-x)



    def tabela(s,cols):

        ncols = len(cols) #numero de colunas

        #INICIO da TABELA ==========================================
        txt = r'''<table border="1">'''



        #LINHA 1 ==========================================
        txt += r'''<tr align="center">'''
        txt += r'''<td>$$x_i$$</td>'''
        for d in range(ncols):
            txt += r'''<td width=30> %d </td>''' % (d) #d in
               ↪ {0,1,2,3,4...}
```

```
        txt += r'''</tr>'''


        #LINHA 2 ===================================
        txt += r'''<tr align="center">'''
        txt += r'''<td>$$\text{P}(X = x_i)$$</td>'''
        for d in range(ncols):
            txt += r'''<td width=30>$$\text{P}(X = %d)$$</td>''' % (
                ↪ d) #d in {0,1,2,3,4...}
        txt += r'''</tr>'''


        #LINHA 3 ===================================
        txt += r'''<tr align="center">'''
        txt += r'''<td>$$\text{P}(X = x_i)$$</td>'''
        for d in range(ncols):
            txt += r'''<td width=30> ''' + str(cols[d]) + r'''</td
                ↪ >'''
        txt += r'''</tr>'''


        #FIM da TABELA ===================================
        txt += r'''</table>'''


        return txt
```

A.7.3 Modelo Geométrico. Probabilidade simples

E97k50_ModProbabilidade_003

%SUMMARY Modelo Geométrico

```
Este exercício pretende determinar a probabilidade de determinado
acontecimento usando o modelo Geométrico.
```

```
SIACUAstart
level=1
slip=0.2
guess=0.25
discr=0.3
concepts = [(4734, 1)]
SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
O Pedro está a brincar com um dado com a forma de um tetraedro, cujos
vértices estão numerados de 1 a 4. Qual a probabilidade de ele obter um v1 no
v2º lançamento? <br>
Apresenta o resultado em percentagem, arredondado às
centésimas.
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
<choice> <center> <br> $\text{A probabilidade
pedida é}:vresp\%$ </center> </choice>
<choice> <center> <br> $\text{A
probabilidade pedida é}:err1\%$ </center> </choice>
<choice> <center> <br>
$\text{A probabilidade pedida é}:err2\%$ </center> </choice>
<choice>
<center> <br> $\text{A probabilidade pedida é}:err3\%$ </center> </choice>
</multiplechoice>
```

```
Estamos perante um modelo Geométrico. <br>
<br>No modelo Geométrico, para a variável aleatória X e parâmetro $p$, a
probabilidade de um determinado acontecimento é dada por:
$$P(X = k)=
```

```
(1-p)^{k-1} \times p , k \in \{1, 2, ...\}$$ <br>onde $k$ representa o número de
experiências até obter sucesso.<br>

   <br>Queremos saber qual a
probabilidade de o Pedro obter o primeiro sucesso, obter v1, no v2º
lançamento.<br>

   <br>Neste caso a probabilidade de ter sucesso (obter v1
no lançamento) é $\frac{1}{4}$.<br>
   <br>Logo, a probabilidade de ter
insucesso é $\frac{3}{4}$.<br>

   <br>Designemos por X a variável aleatória
associada a esta experiência, neste caso "contar o número de experiências até
obter sucesso".<br>

   <showone casoo>

   <thisone 1º lançamento>
<br>Se o Pedro obteve v1 no 1º lançamento significa que não teve qualquer
insucesso, logo
   $$P(X=1)=\left(\frac{3}{4}\right)^0\times
\frac{1}{4}=\frac{1}{4} = v3\%$$
   </thisone>

   <thisone 2º lançamento>
<br>Se o Pedro obteve v1 no 2º lançamento significa que teve 1 insucesso, logo
$$P(X=2)=\left(\frac{3}{4}\right)^1\times \frac{1}{4}=\frac{3}{16} = v4\%$$
</thisone>

   <thisone 3º lançamento>
   <br>Se o Pedro obteve v1 no 3º
lançamento significa que teve 2 insucessos, logo
```

```
$$P(X=3)=\left(\frac{3}{4}\right)^2\times \frac{1}{4}=\frac{9}{64} \approx
v5\%$$
   </thisone>


   <thisone 4º lançamento>
   <br>Se o Pedro obteve v1
no 4º lançamento significa que teve 3 insucessos, logo
$$P(X=4)=\left(\frac{3}{4}\right)^3\times \frac{1}{4}=\frac{27}{256} \approx
v6\%$$
   </thisone>


   <thisone 5º lançamento>
   <br>Se o Pedro obteve v1
no 5º lançamento significa que teve 4 insucessos, logo
$$P(X=5)=\left(\frac{3}{4}\right)^4\times \frac{1}{4}=\frac{81}{1024} \approx
v7\%$$

   </thisone>


   </showone>
   <br>
   A probabilidade pedida é
$vresp\%$.
```

Programação

```
class E97k50_ModProbabilidade_003(Exercise):


        def make_random(s):
             s.v1 = ur.iunif(1,6)
             s.v2 = ur.iunif(1,5)
             s.casoo = s.v2-1


        def solve(s):
```

```
s.v3=round(1/4,4)*100
s.v4=round(1/4*3/4,4)*100
s.v5=round(1/4*(3/4)^2,4)*100
s.v6=round(1/4*(3/4)^3,4)*100
s.v7=round(1/4*(3/4)^4,4)*100
s.v8=round((1/4)^2*3/4,4)*100
s.v9=round((1/4)^3*3/4,4)*100
s.v10=round((1/4)^2,4)*100
s.v11=round((1/4)^3,4)*100
s.v12=round((1/4)^4,4)*100
s.v13=round((1/4)^5,4)*100
if s.v2==1:
    s.vresp=s.v3
    s.err1=s.v4
    s.err2=s.v5
    s.err3=s.v10
elif s.v2==2:
    s.vresp=s.v4
    s.err1=s.v3
    s.err2=s.v8
    s.err3=s.v10
elif s.v2==3:
    s.vresp=s.v5
    s.err1=s.v3
    s.err2=s.v8
    s.err3=s.v11
elif s.v2==4:
    s.vresp=s.v6
    s.err1=s.v3
    s.err2=s.v9
    s.err3=s.v12
elif s.v2==5:
    s.vresp=s.v7
```

```
s.err1=s.v3
s.err2=s.v9
s.err3=s.v13
```

A.7.4 Modelo de Poisson. Probabilidade simples e acumulada

E97k50_ModProbabilidade_004

%SUMMARY Modelo de Poisson

```
Este exercício pretende determinar a probabilidade de determinado
acontecimento usando o modelo de Poisson.



   SIACUAstart
   level=1
slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(4734, 1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
A experiência passada mostra que um número médio de v1 clientes por
hora param para colocar gasolina numa bomba.<br>

   Qual é a probabilidade
de, em qualquer hora,

   <showone clienX>
   <thisone>
   $v2$ clientes
pararem?
   </thisone>
   <thisone>
```

```
   $v2$ ou menos clientes pararem?
</thisone>
   </showone>
   <br>
   Utiliza, para os cálculos intermédios,
arredondamentos com um mínimo de quatro casas decimais. Apresenta o resultado
final arredondado às milésimas.
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> <center> <br> $\text{A probabilidade
pedida é}:vresp$ </center> </choice>
   <choice> <center> <br> $\text{A
probabilidade pedida é}:err1$ </center> </choice>
   <choice> <center> <br>
$\text{A probabilidade pedida é}:err2$ </center> </choice>
   <choice> <center>
<br> $\text{A probabilidade pedida é}:err3$ </center> </choice>
</multiplechoice>

   Estamos perante uma variável que representa o número de vezes que determinado fenómeno
   ocorre num dado período de tempo.<br>
   O modelo de Poisson adapta-se a este tipo de situação. <br>



   <br>Designemos por X a
variável que representa o número de clientes que param, por hora, para abastecer
gasolina, nesta bomba.<br>

   <showone clienX>

   <thisone $v2$
clientes pararam>
```

```
   A probabilidade de k clientes pararem é dada por: $$P(X =
k)= e^{-\lambda}\times \frac{\lambda^{k}}{k!}$$ <br>
   <br>
   Neste caso k =
v2.  Sabemos também que o número médio de clientes é $v1$. Logo $\lambda = v1$.
<br>
   Assim,
   <center>
   $$P(X = v2)= e^{-v1}\times \frac{v1^{v2}}{v2!}
\Leftrightarrow P(X = v2)= v5\times \frac{v3}{v4} \Leftrightarrow P(X = v2)
\simeq v6$$
   </center>
   </thisone>


   <thisone $v4$ ou menos clientes
pararam>
   A probabilidade de k clientes pararem é dada por: $$P(X = k)=
e^{-\lambda}\times \frac{\lambda^{k}}{k!}$$ <br>
   Sabemos que o número médio
de clientes é $v1$. Logo $\lambda = v1$.<br>
   Neste caso temos de determinar a
soma de todas as probabilidades para $X \le v2$
   $$P(X \le v2) = somap = v6e
\simeq v6$$
   </thisone>


   </showone>
   <br>
   A probabilidade pedida é
$v6$.
```

Programação

```
class E97k50_ModProbabilidade_004(Exercise):
```

```
def make_random(s):
    s.v1 = ur.iunif(4,6)
    s.v2 = ur.iunif(3,5)
    s.v3 = s.v1^s.v2
    s.v4 = s.v2-1

    s.clienX = ur.iunif(0,1)

def solve(s):

    if s.clienX==0:
        s.v4f = factorial(s.v2)
        s.v5 = round(exp(1)^-s.v1,4)
        s.v6 = round(s.v5*s.v3/s.v4f,3)
    else:
        s.somap = '+'.join([ s.poisson_latex(s.v1,k) for k in
            ↪ range(s.v2) ] )
        s.v6e = sum( [ exp(-s.v1) * s.v1^k/factorial(k) for k in
            ↪  range(s.v2)] )
        s.v6 = round(s.v6e,3)

    v7 = factorial(s.v2)

    if s.clienX==0:
        s.vresp = s.v6
        s.err1 = round(s.v2/s.v1,3)
        s.err2 = round(exp(1)^-s.v2,3)
        s.err3 = round(round(exp(1)^-s.v1,4)*s.v1/factorial(s.v2
            ↪ ),3)
    else:
        s.vresp = s.v6
        s.err1 = round(s.v2/s.v1,3)
```

```
            s.err2 = round(exp(1)^-s.v2,3)
            s.err3 = round(round(exp(1)^-s.v1,4)*s.v1/factorial(s.v2
              ↪ ),3)




    def poisson_latex(s,lam,k):
        return r'e^{-%s} \frac{%s^%s}{%s!}' % (lam, lam, k , k)
```

A.7.5 Modelo Geométrico. Probabilidade acumulada

E97k50_ModProbabilidade_005

%SUMMARY Modelo Geométrico

```
Este exercício pretende determinar a probabilidade de determinado
acontecimento usando o modelo Geométrico.



   SIACUAstart
   level=1
slip=0.2
   guess=0.25
   discr=0.3
   concepts = [(4734, 1)]
   SIACUAend
```

%PROBLEM Exemplo

```
O Pedro está a brincar com um dado. Qual a probabilidade de ele obter
um v1 antes do v2º lançamento? <br>
   Apresenta o resultado em percentagem,
arredondado com duas casa decimais.
```

%ANSWER

```
<multiplechoice>
   <choice> <center> <br> $\text{A probabilidade
pedida é}:vresp\%$ </center> </choice>
   <choice> <center> <br> $\text{A
probabilidade pedida é}:err1\%$ </center> </choice>
   <choice> <center> <br>
$\text{A probabilidade pedida é}:err2\%$ </center> </choice>
   <choice>
<center> <br> $\text{A probabilidade pedida é}:err3\%$ </center> </choice>
</multiplechoice>

   Estamos perante um modelo Geométrico. <br>
<br>No modelo Geométrico, para a variável aleatória X e parâmetro $p$, a
probabilidade de um determinado acontecimento é dada por:
   $$P(X = k)=
(1-p)^{k-1} \times p , k \in \{1, 2, ...\}$$ <br>onde $k$ representa o número de
experiências até obter sucesso.<br>

   <br>Neste caso a probabilidade de ter
sucesso (obter v1 no lançamento) é $\frac{1}{6}$.<br>
   <br>Logo, a
probabilidade de ter insucesso (não obter v1 no lançamento) é $\frac{5}{6}$.<br>
<br>Queremos saber qual a probabilidade de o Pedro obter v1, isto é, obter o
primeiro sucesso, antes do v2º lançamento.<br>

   <br>Designemos por X a
variável aleatória associada a esta experiência, neste caso "contar o número de
experiências até obter sucesso"<br>
   <br>

   <showone lanX>
   <thisone
antes do 3º lançamento>
```

Para o Pedro obter v1 antes do 3º lançamento
significa que poderá obter sucesso no 1º ou no 2º lançamento, isto é:

$$P(X <
3)=P(X=1)+P(X=2)$$

Ora,

$$P(X=1)=\left(\frac{5}{6}\right)^0\times
\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

$$P(X=2)=\left(\frac{5}{6}\right)^1\times
\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$$

então,

$$P(X < 3)=\frac{1}{6} + \frac{5}{36}
\approx v4$$

A probabilidade pedida é $vresp\%$.

</thisone>

<thisone antes do 4º lançamento>

Para o Pedro obter v1 antes do 4º lançamento
significa que poderá obter sucesso no 1º, no 2º ou no 3º lançamento, isto é:
$$P(X < 4)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$

Ora,

$$P(X=1)=\left(\frac{5}{6}\right)^0\times \frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$
$$P(X=2)=\left(\frac{5}{6}\right)^1\times \frac{1}{6}=\frac{5}{36}$$
$$P(X=3)=\left(\frac{5}{6}\right)^2\times \frac{1}{6}=\frac{25}{216}$$

então,

$$P(X < 4)=\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216} \approx v5$$

A
probabilidade pedida é $vresp\%$.

</thisone>

<thisone antes do 5º
lançamento>

Para o Pedro obter v1 antes do 5º lançamento significa que poderá

```
obter sucesso no 1º, no 2º, no 3º ou no 4º lançamento, isto é:
   $$P(X <
5)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$$
   Ora,
$$P(X=1)=\left(\frac{5}{6}\right)^0\times \frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$
$$P(X=2)=\left(\frac{5}{6}\right)^1\times \frac{1}{6}=\frac{5}{36}$$
$$P(X=3)=\left(\frac{5}{6}\right)^2\times \frac{1}{6}=\frac{25}{216}$$
$$P(X=4)=\left(\frac{5}{6}\right)^3\times \frac{1}{6}=\frac{125}{1296}$$
então,
   $$P(X < 5)=\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216} +
\frac{125}{1296} \approx v6$$

   A probabilidade pedida é $vresp\%$.
</thisone>

   <thisone antes do 6º lançamento>
   Para o Pedro obter v1
antes do 6º lançamento significa que poderá obter sucesso no 1º, no 2º, no 3º,
no 4º ou no 5º lançamento, isto é:
   $$P(X <
6)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$
   Ora,
$$P(X=1)=\left(\frac{5}{6}\right)^0\times \frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$
$$P(X=2)=\left(\frac{5}{6}\right)^1\times \frac{1}{6}=\frac{5}{36}$$
$$P(X=3)=\left(\frac{5}{6}\right)^2\times \frac{1}{6}=\frac{25}{216}$$
$$P(X=4)=\left(\frac{5}{6}\right)^3\times \frac{1}{6}=\frac{125}{1296}$$
$$P(X=5)=\left(\frac{5}{6}\right)^4\times \frac{1}{6}=\frac{625}{7776}$$
então,
   $$P(X < 6)=\frac{1}{6} + \frac{5}{36} +
\frac{25}{216}+\frac{125}{1296}+\frac{625}{7776} \approx v7$$

   A
probabilidade pedida é $vresp\%$.
```

```
</thisone>


</showone>
<br>
```

Programação

```
class E97k50_ModProbabilidade_005(Exercise):

    def make_random(s):
        s.v1 = ur.iunif(1,6)
        s.v2 = ur.iunif(3,6)
        s.v3 = s.v2 - 1
        s.lanX = s.v2 - 3

    def solve(s):
        s.v4 = round(1/6+5/36,4)*100
        s.v5 = round(1/6+5/36+25/216,4)*100
        s.v6 = round(1/6+5/36+25/216+125/1296,4)*100
        s.v7 = round(1/6+5/36+25/216+125/1296+625/7776,4)*100
        if s.v2==3:
            s.vresp = s.v4
            s.err1 = round(25/216,4)*100
            s.err2 = s.v5
            s.err3 = 100-s.v5
        elif s.v2==4:
            s.vresp = s.v5
            s.err1 = round(125/1296,4)*100
            s.err2 = s.v6
            s.err3 = 100-s.v6
        elif s.v2==5:
            s.vresp = s.v6
            s.err1 = round(625/7776,4)*100
            s.err2 = s.v7
```

```
            s.err3 = 100-s.v7
        elif s.v2==6:
            s.vresp = s.v7
            s.err1 = 100
            s.err2 = 100-s.v6
            s.err3 = 100-s.v7

    '''
    def geometric_latex(s,k):
        return r'\left(\frac{5}{6}\right)^{%s} \frac{1}{6}' % (k)
        '''
```